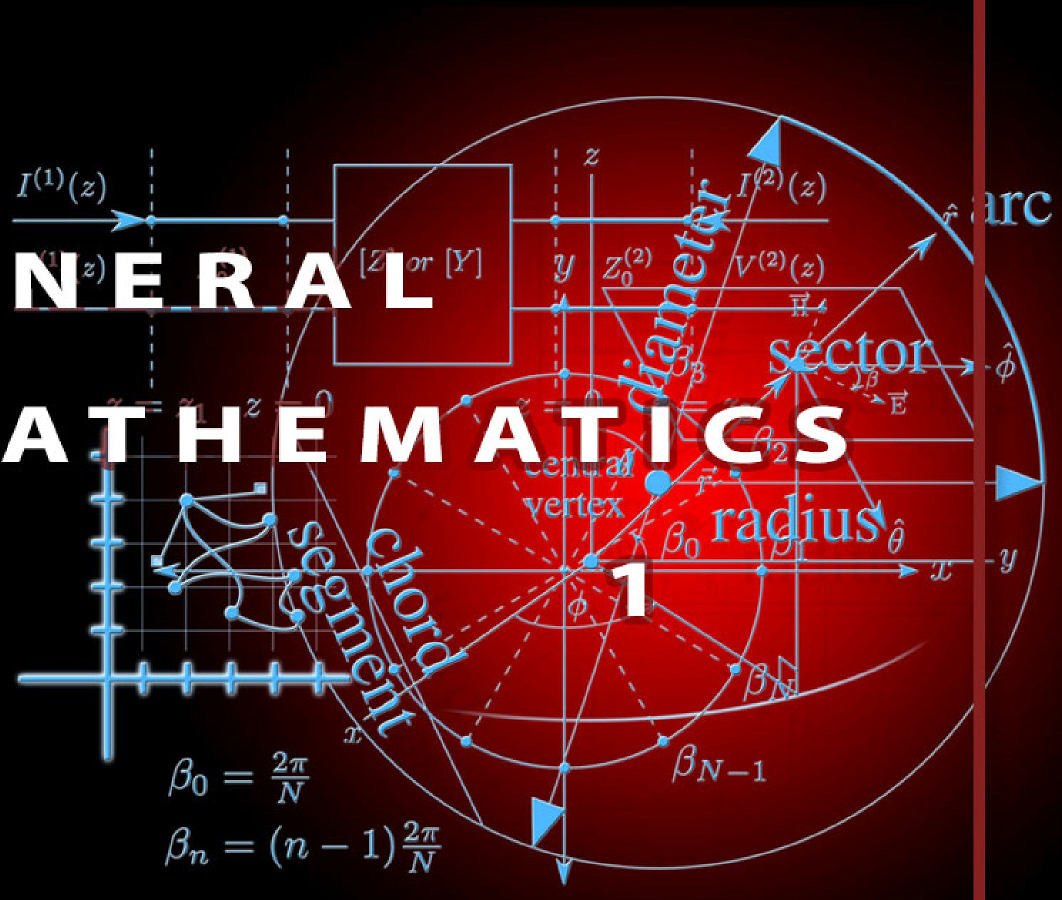
ریاضی عمومی ۱

GENERAL MATHEMATICS 1



Cover Designed By IranPuyesh

ایران پویش

سامانه علمی، پژوهشی، آموزشی و مشاوره ای

مرجع تالیف و گرد آوری محتوای آموزشی، جزوات
و نمونه سؤالات دانشگاه های برتر کشور

ارائه دهنده خدمات پژوهشی به اساتید و دانشجویان

وبسایت: iranpuyesh.ir

ایمیل: support@iranpuyesh.ir

تلگرام پشتیبانی علمی: @IranPuyesh_Support

Iran Puyesh

ریاضی عمومی 1

General Mathematics 1

فهرست

فصل اول

اعداد مختلط

هر عدد مختلط به صورت $z = x + iy$ نوشته می‌شود که در آن x , y اعداد حقیقی بوده و $i = \sqrt{-1}$ به عدد موهومی محض، موسوم است.

$i^2 = -1$

z قسمت حقیقی : $\operatorname{Re} z = x$

z قسمت موهومی : $\operatorname{Im} z = y$

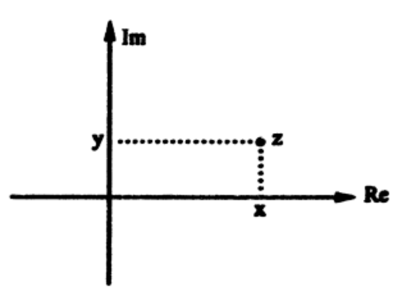
z مدول یا اندازه : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

z مزدوج : $\bar{z} = x - iy$

$\bar{z}$، مزدوج z می‌باشد که در واقع قرینه نقطه z نسبت به محور xها می‌باشد.

نکته: از نقطه نظر هندسی، هر عدد مختلط مانند $z = x + iy$ را می توان به منزله یک نقطه با مختصات (x, y) در صفحه دکارتی در نظر گرفت.

که طبیعی است در این دستگاه مختصات، محور xها، محور حقیقی و محور yها، محور موهومی می‌باشد.



نکته: حاصل‌ضرب هر عدد مختلط در مزدوج آن، حاصلی صرفاً حقیقی دارد زیرا اگر $z = a+ib$ فرض شود ملاحظه می‌شود که:

$$z \ . \ \bar{z} = (a+ib)\ (a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

بنابراین **با** توجه به حقیقت فوق، برای محاسبه حاصل تقسیم دو عدد مختلط کافی است صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و مسئله را ادامه دهیم. $(z_2 = c+id\ ,\ z_1 = a+ib)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

مثال: فرض کنید n یک عدد حقیقی باشد، مقدار n چند انتخاب شود تا عدد مختلط $z = (n+1) + in$ بر روی دایره واحد $|z| = 1$ واقع شود؟

حل: از آنجا که تمام نقاط z باید روی دایره $|z| = 1$ واقع شوند داریم:

$$|z| = 1 \rightarrow |(n+1) + in| = 1 \Rightarrow \sqrt{(n+1)^2 + n^2} = 1 \Rightarrow n^2 + 2n + 1 + n^2 = 1 \Rightarrow 2n^2 + 2n = 0 \Rightarrow n = 0\ ,\ -1$$

مثال: روابط $\begin{cases} \operatorname{Re} z = 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$ بیانگر چه شکلی در صفحه مختلط می‌باشد؟

حل: از آنجائی‌که، $\operatorname{Re} z = 0$ بیانگر محور yها و $\operatorname{Im} z \geq 0$ شرط $y \geq 0$ را بیان می‌کند. لذا روابط مذکور، تواماً نیم‌محور بالایی محور y**ها** را توصیف می‌کند.

مثال: روابط $|z-1| = \operatorname{Im} z \quad , \quad |z-1| = \operatorname{Re} z$، چه اشکالی را در صفحه مختلط معرفی می‌کنند؟

حل: با فرض $z = x+iy$ داریم:

$$|z-1| = \operatorname{Im} z \Rightarrow |x-1+iy| = y \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = y \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = y^2 \Rightarrow x = +1$$

از طرفی چون $|z-1| \geq 0$ است، **لذا** یک نیم‌خط به صورت $x = 1\ ,\ y \geq 0$ موردنظر می‌باشد.

برای قسمت دوم داریم:

$$|z-1| = \operatorname{Re} z \rightarrow |x-1+iy| = x \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x$$

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 = x^2$$

پس داریم $x = \frac{1+y^2}{2}$ که بیانگر یک سهمی می‌باشد.

مثال: اگر z توصیف کننده یک متغیر مختلط باشد، ناحیه ای که با رابطه $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$ توصیف می‌شود را مشخص کنید؟

حل:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} . \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > 1 \Rightarrow \frac{-y}{x^2+y^2} > 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + y < 0 \Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

مرز ناحیه مورد نظر $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ می‌باشد و همان‌طور که می‌دانیم دایره‌ای است به مرکز $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و شعاع $R=\frac{1}{2}$:
با مشخص شدن مرز، کافی است وضعیت یک نقطه را مشخص کنیم به عنوان مثال نقطه $(0\,,1)$ در خارج دایـره قـرار دارد و شرط $\frac{-y}{x^2+y^2}>1$ را ارضا نمی کند. بنابراین، نقاط داخل دایره‌ای به مرکز $\left(0\,,\frac{-1}{2}\right)$ و شعاع $R=\frac{1}{2}$ ناحیه مورد نظر است.

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه با رابطه $\mathrm{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=1$ را مشخص کنید.

حل:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\cdot\frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{x^2+\left(y^2-1\right)+i\ (....)}{x^2+(y+1)^2}\right)$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$=\frac{x^2+\left(y^2-1\right)}{x^2+(y+1)^2}=1\Rightarrow x^2+y^2-1=x^2+y^2+2y+1\Rightarrow y=-1$$

پس مکان هندسی این نقاط خط $y=-1$ است.

مثال: چنانچه z یک متغیر مختلط باشد $(z=x+iy)$، رابطه زیر توصیف‌کننده چه اشکال یا نواحی خواهد بود؟

$$z\bar{z}=\mathrm{Im}\left(z^2\right)$$
$$z\bar{z}=x^2+y^2$$
$$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy\rightarrow \mathrm{Im}\left(z^2\right)=2xy$$
$$\Rightarrow x^2+y^2=2xy=x^2-2xy+y^2=0\Rightarrow(x-y)^2=0\Rightarrow x-y=0$$

به صورت خط $x=y$ خواهد بود.

نکته: اگر $z=x+iy$ فرض شود و $z_0=x_0+iy_0$ یک عدد مختلط معین باشد، به سادگی می‌توان نشان داد مکان هندسی نقاطی از صفحه که با رابطه $|z-z_0|=R$ مشخص می شود، دایره $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ می باشد، یعنی دایره ای به مرکز z_0 و شعاع R.

بنابراین می توان رابطه $|z-z_0|=R$ را به منزله مکان هندسی نقاطی از صفحه دانست، که فاصله شان تا نقطه z_0 عـدد ثابـت R مـی باشد. و بنابراین به سادگی می توان نتیجه گرفت که اگر $z_1\,,z_0$ دو عدد مختلط معین باشند آنگاه:

الف) مکان هندسی نقاطی که با رابطه $|z-z_0|+|z-z_1|=R$ توصیف می شود، یک بیضی به کانونهای $z_0\,,z_1$ است، با شرط:
$|z_0-z_1|<R$

ب) مکان هندسی نقاطی که با رابطه $|z-z_0|-|z-z_1|=R$ توصیف می شود یک هذلولی به کانونهای $z_0\,,z_1$ است، با شرط:
$|z_0-z_1|>R$

ج) مکان هندسی نقاطی که با رابطه $|z-z_0|=|z-z_1|$ توصیف می شود، عمود منصف پاره خطی است که $z_0\,,z_1$ را به هـم متصـل می‌کند.

نکته: خواص زیر در مجموعه اعداد مختلط برقرار است:

$\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$	$\lvert z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert$
$\overline{(z_1\, z_2)} = \bar{z}_1\, \bar{z}_2$	$\lvert z_1\, z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\, \lvert z_2\rvert$
$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$	$\left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert = \dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$

مثال: هرگاه $z = a+ib$ فرض شود حاصل $\left|\dfrac{iz}{\bar{z}}\right|$ چه مقدار است؟

حل: با استفاده از خواص بالا داریم:

$$\left|\frac{iz}{\bar{z}}\right| = \frac{|iz|}{|\bar{z}|} = \frac{|i||z|}{|\bar{z}|} = \frac{|i||a+ib|}{|a-ib|} = \frac{1\times\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$$

مثال: اگر z_2 , z_1 جوابهای معادله $z^2+z+1=i$ باشد حاصل $|z_1 - z_2|$ چقدر است؟

حل: همان‌طور که ملاحظه می‌شود معادله فوق، یک معادله درجه دوم است بنابراین داریم:

$$|z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \left|\frac{\sqrt{(1)^2-(4)(1)(1-i)}}{1}\right| = \left|\sqrt{4i-3}\right| = \sqrt{|4i-3|} = \sqrt{5}$$

بیان منحنی در فرم پارامتری

یک منحنی در صفحه مختلط می‌تواند توسط یک رابطه، پارامتری نظیر $z(t) = x(t)+i\,y(t)$ معرفی شود و برای مشخص کردن آن باید پارامتر t را بین y , x حذف کرد.

مثال: منحنی تعریف شده با رابطه $z(t) = \sin^2 t + i\cos^2 t$:

الف) دایره‌ای با محیط 2π است.
ب) دایره‌ای با محیط π است.
ج) پاره‌خطی به طول $\sqrt{2}$ است.
د) پاره‌خطی به طول 1 است.

حل:

$$z(t) = \sin^2 t + i\cos^2 t \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$$

لذا داریم: $x+y=1$ که بیانگر یک خط راست است و چون $x = \sin^2 t \ge 0$, $y = \cos^2 t \ge 0$ پس قسمتی از این خط (پاره‌خط) که در ربع اول قرار گرفته مدنظر است و به سادگی می‌توان ملاحظه نمود که طول این پاره‌خط $\sqrt{2}$ است.

مثال: منحنی $z(t) = \cosh t + i\sinh t$ بیانگر چه منحنی‌ای می‌باشد؟

الف) قسمتی از یک بیضی
ب) یک بیضی
ج) قسمتی از یک هذلولی
ج) یک هذلولی

حل:

$$z(t) = \cosh t + i\sinh t \Rightarrow \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$$

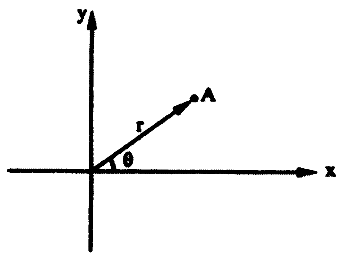
لذا طبق رابطه $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ داریم: $x^2-y^2=1$ که بیانگر یک هذلولی است و از آنجا که $x=\cosh t\geq 1$ لذا یکـی از شاخه‌های این هذلولی مدنظر است.

فرم قطبی اعداد مختلط:

همانطوری که می دانیم، برای مشخص کردن یک نقطه در صفحه نیاز به دو مختصه داریم کـه در مختصـات دکـارتی ایـن دو مختصـه طول و عرض نقطه (x,y) می باشد، در دستگاه مختصات قطبی از دو مختصه r,θ مطابق شکل زیر استفاده می شود:

$OA=r$: طول شعاع حامل نقطه A

θ: زاویه شعاع حامل نقطه A با جهت مثبت محور x ها



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$$(I)\quad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

بنابراین، نقطه A در مختصات قطبی به صورت $A(r,\theta)$ نشان داده می‌شود.

در محاسبه θ از رابطه (I) باید به این نکته توجه داشته باشیم که تمام زوایایی که در π با هم اختلاف دارند تانژانت یکسـانی دارنـد، لذا باید به موقعیت نقطه و این که در کدام ربع دستگاه مختصات قرار می گیرد توجه داشته باشیم.

حال با استفاده از دستگاه مختصات قطبی می‌توان نوشت:

$$\boxed{z=x+iy=r\ (\cos\theta+i\ \sin\theta)\xrightarrow{\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}} z=r\ .\ e^{i\theta}}$$

توجه: به خاطر داشته باشید کار کردن با اعداد مختلط وقتی آنها را به صورت قطبی نوشته ایم، در برخـی مـوارد بـا سـهولت بیشتری انجام می‌گیرد، به عنوان مثال اگر $z_1=\rho e^{i\varphi}$, $z_0=re^{i\theta}$ توصیف کننده دو عدد مختلط معین باشند داریم:

$$\boxed{\begin{aligned} & z_0.z_1=\left(re^{i\theta}\right)\left(\rho e^{i\varphi}\right)=r\rho e^{i(\theta+\varphi)}=r\rho\left(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\right) \\ & \frac{z_0}{z_1}=\frac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\phi}}=\frac{r}{\rho}e^{i(\theta-\phi)}=\frac{r}{\rho}(\cos(\theta-\phi)+i\sin(\theta-\phi)) \\ & (\forall n\in N)\qquad z_0^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^n e^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \end{aligned}}$$

نکته: رابطه $\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$ به رابطه دمواور معروف است.

مثال: مطلوب است محاسبه مقدار A:

$$A=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{12}$$

حل: نخست اعداد مختلط صورت و مخرج را در فرم قطبی می‌نویسیم:

می‌دانیم نقطه در ربع چهارم واقع است.

$$1-\sqrt{3}i=\begin{cases} r=\sqrt{1+3}=2 \\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\tan^{-1}\sqrt{3}=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{3} & \text{ربع چهارم} \\ \pi-\dfrac{\pi}{3} & \text{ربع دوم} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 1-\sqrt{3}i=2\ e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

می‌دانیم نقطه در ربع اول واقع است.

$$1+\sqrt{3}i=\begin{cases} r=\sqrt{1+3}=2 \\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{1}= \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} & \text{ربع اول} \\ \pi+\dfrac{\pi}{3} & \text{ربع سوم} \end{cases} \Rightarrow 1+\sqrt{3}i=2\ e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$A=\left(\frac{2e^{-\frac{\pi i}{3}}}{2e^{\frac{\pi i}{3}}}\right)^{12}=\left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right)^{12}=e^{-8i\pi}=\cos(-8\pi)+i\sin(-8\pi)=1$$

مثال: اگر z یک عدد مختلط باشد و $|z|=5$ مطلوب است محاسبه عبارت $\left|ze^{\frac{\pi}{3}i}-z\right|$

حل:

$$\left|ze^{\frac{\pi}{3}i}-z\right|=\left|(z)\left(e^{\frac{\pi}{3}i}-1\right)\right|=|z|\left|e^{\frac{\pi}{3}i}-1\right|=|z|\left|\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}-1\right|=|z|\left|\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=5\times\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=5$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $z_n=\cos\dfrac{\pi}{2^n}+i\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ مطلوب است محاسبه:

$$A=\prod_{m=1}^{\infty} z_m$$

حل: با نوشتن z_n به فرم قطبی داریم:

$$z_n=\cos\frac{\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi}{2^n}=e^{i\frac{\pi}{2^n}}$$

$$A=z_1.z_2.z_3.z_n\ldots=e^{i\frac{\pi}{2^1}}.e^{i\frac{\pi}{2^2}}.e^{i\frac{\pi}{2^3}}\ldots$$
$$=e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)}$$

ملاحظه می‌شود $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots\right)$ یک تصاعد هندسی است. با استفاده از رابطه $s_\infty=\dfrac{t_1}{1-q}$

که در آن t_1: جمله اول، q قدرنسبت تصاعد (با فرض $|q|<1$) و s_∞: مجموع بی‌نهایت جمله می‌باشد، داریم:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\sim\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$A=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

نکته: با توجه به روابط می‌توان نشان داد:

$$\left.\begin{array}{l} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ \bar{e}^{i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \\ \cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \end{cases}}$$

نیز داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cosh x=\cos i x \\ i\sinh x=\sin i x \end{array}}$$

مثال: اگر $A=\sin\ (2+3i)$ باشد، قسمت موهومی A را به‌دست آورید.

حل:

$$\sin(2+3i)=\sin 2\ .\ \cos 3i+\cos 2\ .\ \sin 3i=\sin 2.\cosh 3+i\cos 2.\sinh 3$$

که ملاحظه می‌شود قسمت موهومی عدد A برابر است با:

$$\mathrm{Im}(A)=(\cos 2).(\sinh 3)$$

مثال: مطلوب است قسمت حقیقی عدد $A=(\cos 30+i\sin 30)^8$

حل: طبق رابطه دموآور داریم:

$$A=(\cos 30+i\sin 30)^8=\cos(8\times 30)+i\sin(8\times 30)$$
$$=\cos(240)+i\sin 240=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس داریم $\mathrm{Re}(A)=\dfrac{-1}{2}$

دو نکته در رابطه با اعداد مختلط

الف) محاسبه ریشه های *n* ام یک عدد مختلط:

هر عدد مختلط دارای n ریشه nام می باشد و چنانچه داشته باشیم $z=re^{i\theta}$ می توان نشان داد:

$$\boxed{\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ ,\ k=0,1,2,\ldots,n-1}$$

یعنی برای مثال:

ریشه هفتم یک عدد مختلط، هفت ریشه (اعم از موهومی و حقیقی) دارد.

ب) محاسبه لگاریتم نپرین یک عدد مختلط *(ln z)* :

در صورتی که $z=re^{i\theta}$ یک عدد مختلط معین باشد، می توان نشان داد:

$$\boxed{\mathrm{Ln}\,z=\mathrm{Ln}\,r+i(\theta+2k\pi)}$$

که در آن k یک عدد صحیح نسبی دلخواه است و لذا، لگاریتم نپرین یک عدد مختلط دارای بی‌شمار جواب است.

مثال: مطلوب است حاصل عبارت $\sqrt{-i}$.

حل: ابتدا نقطه $i-$ را به فرم قطبی می‌نویسیم:

$$(-i)=\begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

می‌دانیم که عبارت $\sqrt{-i}$ دارای دو ریشه می‌باشد:

$$\sqrt{-i}=\sqrt[2]{1}\ \left\{\cos\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{2}\right\}\ ,\ \ k=0,1$$

$$k=0 \quad\Rightarrow\quad w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k=1 \quad\Rightarrow\quad w_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: عدد مختلط زیر مفروض است:

$$z=\frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$$

مطلوب است محاسبه ریشه های دوم این عدد مختلط.

حل:

$$z=\frac{1+i}{1+i+1-1-2i}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i-1}{1+1}=i$$

$$(i)=\begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt[2]{z}=\sqrt[2]{i}=\sqrt[2]{1}\ \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\ \ \sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)\ ,\ \ k=0,1$$

$k=0\rightarrow$ جواب اول $:\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1\rightarrow$ جواب دوم $:\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

مثال: حاصل $Ln(-1)$ را به‌دست آورید.

حل: نقطه (-1) را به فرم قطبی می‌نویسیم:

$$(-1)=\begin{cases} r=1 \\ \theta=\pi \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\ln(-1)=\ln(1)+i(\pi+2k\pi)=i(\pi+2k\pi)$$

لذا $\ln(-1)$ دارای بی‌نهایت مقدار موهومی می‌باشد.

مثال: حاصل عدد مختلط $z=i^i$ را به‌دست آورید.

حل: نقطه i را به فرم قطبی می نویسیم:

$$(i)=\begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\ln\ z=i\ln i=i\left\{\ln\ (1)+i\ \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\}=-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$z=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

مثال: مقدار $\overline{\exp z}$ (مزدوج e^z) کدام است؟

الف) $\exp z$ ب) $\exp \bar{z}$ ج) $(\exp z)^{-1}$ د) $\exp z^{-1}$

حل:

$$\overline{\left(e^z\right)}=\overline{\left(e^{x+iy}\right)}=\overline{\left(e^x\ e^{iy}\right)}=e^x\ e^{-iy}=e^{x-iy}=e^{\bar{z}}=\exp(\bar{z})$$

مثال: حاصل عبارت $\left(\dfrac{i-\tan\alpha}{i+\tan\alpha}\right)^n$ کدام است؟

الف) $\left(\dfrac{i+\tan n\alpha}{i-\tan n\alpha}\right)$ ب) $\left(\dfrac{1-i\tan n\alpha}{i+i\tan n\alpha}\right)$ ج) $\left(\dfrac{i+i\tan n\alpha}{1+i\cot n\alpha}\right)$ د) $\left(\dfrac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}\right)$

حل:

$$\left(\frac{i-\tan\alpha}{i+\tan\alpha}\right)^n=\left(\frac{i-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{i+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^n$$

$$\left(\frac{i\cos\alpha-\sin\alpha}{i\cos\alpha+\sin\alpha}\right)^n=\left(\frac{i(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{i(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right)^n$$

طبق رابطه دموآور داریم:

$$=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos n\alpha-i\sin n\alpha}=\frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$$

مثال: کدام‌یک از گزینه‌های زیر یکی از ریشه‌های معادله $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ می‌باشد؟

الف) i ب) $-i$ ج) $\dfrac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ د) هیچکدام

حل: با ضرب طرفین معادله در $z-1$ به‌دست می‌آید:

$$(z-1)\left(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1\right)=0\Rightarrow z^6-1=0\Rightarrow z^6=1$$

لذا ریشه‌های معادله مذکور $z=\sqrt[6]{1}$ (بجز $z=1$) خواهد بود.

$$1=\begin{cases} r=1 \\ \theta=0 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$z=\sqrt[6]{1}\ \left\{\cos\frac{0+2k\pi}{6}+i\sin\frac{0+2k\pi}{6}\right\},\ k=0,1,2,3,\dots,5$$

به ازای $k=1$ به‌دست می‌آید:

$$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لذا ملاحظه می‌شود که گزینه ج صحیح است.