«به نام خداوند»

آمار پزشکی

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

تاریخ: ۹۳/۶/۳۰

۲

استاد: دکتر پور حسین قلی

پیاده کردن رکورد: علیرضا صوتی

تایپ: احمد همت یار

پیشاپیش از برخی مفصل نویسی ها در حل مسائل عذر میخواهم !

" احتمالات "

فضای نمونه : مجموعه ای که تمام پیشامدهای ممکن در آن وجود دارد ، مثلا در پرتاب یک تاس ، فضای نمونه برابر است با : A = { ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ }

پیشامد : به هر زیر مجموعه ای از این فضای نمونه ، پیشامد میگویند .

پیشامد تهی (∅) یا غیر ممکن : یعنی پیشامدی که احتمال وقوع ندارد و همیشه برابر صفر است .

پیشامد قطعی : به فضای نمونه یا مجموعه مرجع که شامل همه پیشامدهاست ، پیشامد قطعی میگویند .

پیشامد ناسازگار : دو پیشامدی که وقوع توام آنها غیر ممکن باشد ؛ دو پیشامدی که هیچ اشتراکی با هم نداشته باشد ، مانند این که در پرتاب یک تاس یکبار عدد فرد و بار دیگر عدد زوج بیاید .

پیشامد مستقل : دوپیشامدی که وقوع یا عدم وقوع یکی ، در وقوع یا عدم وقوع دیگری اثری نداشته باشد .

متغیر تصادفی : اندازه ای که به هر پیشامد از فضای نمونه نسبت داده میشود .

❖ قوانین احتمال :

احتمال یک پیشامد همواره بزرگتر یا مساوی صفر است و احتمال منفی نداریم و از طرفی مقدار یک احتمال همیشه بین یک تا صفر است ($۱ \geq P(A) \geq ۰$) و احتمال بزرگتر از یک نداریم .

برای دو ***پیشامد ناسازگار*** **اجتماع** این دو پیشامد ، برابر حاصل جمع احتمال تک تک پیشامدهاست :

A و B دو پیشامد ناسازگار= $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

اگر نتیجه آزمایشی بتواند به N صورت با امکان وقوع یکسان و ناسازگار رخ دهد و از این N صورت ، M صورت آن برای وقوع پیشامد معین A مساعد باشد ، آنگاه :

احتمال وقوع پیشامد A = $\mathbf{P\ (A)} = \dfrac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{N}}$

بطور مثال در پرتاب یک تاس احتمال ظاهر شدن عدد 6 ، $\frac{1}{6}$است .

مثال : در پرتاب دوتاس به صورت همزمان ، احتمال اینکه هردوتاس عدد فرد را نشان دهند چقدر است ؟

$\frac{1}{2}$= احتمال فرد بودن تاس ۱ ، A = { ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ } ، A = فضای نمونه تاس ۱

$\frac{1}{2}$= احتمال فرد بودن تاس ۲ ، B = { ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ } ، B = فضای نمونه تاس ۲

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ = احتمال فرد بودن هر دو تاس

بطور کلی **اجتماع** دو مجموعه (پیشامد) A و B برابراست با :

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

برای دو**پیشامد ناسازگار** ، **اجتماع** دومجموعه برابراست با :

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

اگر دو **پیشامد مستقل** از هم باشند ، **اشتراک** دو مجموعه A و B برابرست با حاصلضرب پیشامدهای دو مجموعه :

A و B دوپیشامد مستقل = $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

(یا = $\cup$ ، و = $\cap$)

احتمال شرطی : احتمال رخ دادن پیشامد A ، به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد ، برابرست با :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

برای دو **پیشامد مستقل** ، احتمال شرطی پیشامد A به شرط رخ دادن پیشامد B برابراست با :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)} = \mathrm{P(A)}$$ A و B مستقل =

❖ **مسائل احتمالات :**

۱ . یک تاس را پرتاپ میکنیم ، احتمال اینکه عدد به دست آمده زوج باشد **یا** بزرگتر از ۴ باشد ، چقدر است ؟

$P(A) = \frac{3}{6}$ ، A = { ۲ ، ۴ ، ۶ } ، (مجموعه زوج آمدن تاس = A)

$P(B) = \frac{2}{6}$ ، B = { ۵ ، ۶ } ، (مجموعه بزرگتر از ۴ آمدن تاس = B)

A∩B = { ۶ } , $P(A\cap B) = \frac{1}{6}$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

۲ . یک سکه را دومرتبه پرتاب میکنیم . آیا دو پیشامد رخ دادن خط در پرتاب اول و رخ دادن خط در پرتاب دوم مستقل از یکدیگرند ؟ (شیر = H ، خط = T)

فضای نمونه = S = { HH , HT , TH , TT }

A پیشامد = بار اول دو سکه خط بیاید = { TH ، TT } ، $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

B پیشامد = بار دوم دو سکه خط بیاید = { HT ، TT } ، $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (I)

A∩ B = { TT } ، $P(A\cap B) = \frac{1}{4} \longrightarrow$ (II)

برای اثبات مستقل بودن باید ثابت کنیم ، که آیا رابطه $\boldsymbol{P(A\cap B) = P(A)\times P(B)}$ برقرار هست یا نه :

(I) و (II) $\longrightarrow$ $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ √

پس دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند .

۳ . دوتاس را (یکی سفید و یکی سیاه) به صورت همزمان پرتاب میکنیم . آیا دو پیشامد رخ دادن عدد ۲ در تاس سفید **و** رخ دادن مجموع ۵ در شماره های دوتاس ، از هم مستقل اند ؟

A پیشامد =تاس اول دو بیاید = { (۲ ، ۱) ، (۲ ، ۲)، (۲ ، ۳) ، (۲ ، ۴) ، (۲ ، ۵) ، (۲ ، ۶)} ، $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

B پیشامد = مجموع اعداد دوتاس ۵ شود = { (۴ ، ۱) ، (۱ ، ۴) ، (۳ ، ۲) ، (۲ ، ۳)} ، $P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$A\cap B = \{(۲ ، ۳)\}$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

$$P(A)\times P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{54}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$$

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ $\longrightarrow$ دوپیشامد Aو B مستقل نیستند

۴ . یک تاس سالم را به تصادف پرتاب میکنیم ، احتمال اینکه عدد ۴ بیاید **به شرط اینکه** بدانیم عدد بزرگتر از ۳ آمده است چقدر است ؟

A پیشامد = این که عدد ۴ بیاید = { ۴ } $A\cap B = \{۴\}$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

B پیشامد = در تاس عدد بزرگتر از ۳ بیاید = { ۴ ، ۵ ، ۶} ، $P(B)=\frac{3}{6}$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$$

۵ . در کیسه ای ۶ گلوله آبی ، ۶ گلوله قرمز ، ۶ گلوله سفید و ۶ گلوله سیاه وجود دارد که گلوله های هر رنگ به ترتیب از ۱ تا ۶ شماره گذاری شده اند . از کیسه یک گلوله به تصادف برمیداریم ، در صورت قرمز بودن ، احتمال اینکه گلوله شماره ۴ باشد ، چقدر است ؟

۴ تا گلوله ۴ $\longrightarrow$ ۴ تا رنگ داریم $\longrightarrow$ از هر رنگ ، یک گلوله ۴ وجود دارد

گلوله شماره ۴ باشد = A پیشامد = { ۴ ، ۵ ، ۶} ، $P(A) = \frac{4}{24}$

کل گلوله ها

۶ گلوله قرمز وجود دارد

قرمز بودن گلوله = B پیشامد = { ۴ ، ۵ ، ۶} ، $P(B) = \frac{6}{24}$

پیشامد گلوله ۴ و قرمز = $P(A \cap B) = \frac{1}{24}$

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{6}{24}} = \frac{1}{6}}$$

۶ . شخصی دارای سه فرزند ۱۷ ساله ، ۱۹ ساله و ۲۱ ساله است ، اگر احتمال مرگ در سنین فوق در طول سال به ترتیب برابر ۰/۰۰۷۶ و ۰/۰۰۷۷ و ۰/۰۰۷۸ باشد ، مطلوب است احتمال اینکه :

الف) فرزند کوچکتر فوت کند **و** دوم واول زنده بمانند ؟

احتمال مرگ فرزند سوم = $P(A)$ = ۰/۰۰۷۶

احتمال مرگ فرزند دوم = $P(B)$ = ۰/۰۰۷۷ $\longrightarrow$ احتمال زنده ماندن فرزند دوم = ۱ − ۰/۰۰۷۷ = $P(B`)$

احتمال مرگ فرزند اول = $P(C)$ = ۰/۰۰۷۸ $\longrightarrow$ احتمال زنده ماندن فرزند اول = ۱ − ۰/۰۰۷۸ = $P(C`)$

A و $B`$ و $C`$ هر سه پیشامد مستقل از یکدیگرند : $\longrightarrow$

$$\underbrace{P(A \cap B` \cap C`)}_{\text{مرگ فرزند سوم و زنده ماندن فرزندان اول و دوم}} = P(A) \times P(B`) \times P(C`) = (۰/۰۰۷۶)(۱ - ۰/۰۰۷۷)(۰/۰۰۷۸)$$

ب) حداقل یکی از فرزندان زنده باشد ؟

برای محاسبه این احتمال ، احتمال مرگ هر سه فرزند را حساب کرده و حاصل را از احتمال کل (یک) کم میکنیم .

احتمال مرگ هر سه فرزند = (۰/۰۰۷۶)(۰/۰۰۷۷) (۰/۰۰۷۸)

احتمال زنده ماندن حداقل یک فرزند = ۱ − (۰/۰۰۷۶)(۰/۰۰۷۷) (۰/۰۰۷۸)

۷ . اگر احتمال مرگ در سال اول زندگی برابر ۰/۰۸ و احتمال مرگ برای کودک یکساله در فاصله ۱ تا ۵ سالگی برابر ۰/۰۴ باشد ، مطلوب است احتمال اینکه نوزادی که به طور تصادفی انتخاب شده است :

الف) حداقل یکسال عمر کند ؟

برای محاسبه این احتمال ، احتمال مرگ فرزند در سال اول را از کل احتمالات کم میکنیم :

احتمال مرگ در سال اول = ۰/۰۸ ، P(A) = ۱ − ۰/۰۸ = ۰/۹۲

ب) حداقل ۵ سال عمر کند ؟

احتمال مرگ کودک تا یک سالگی **<u>و</u>** احتمال مرگ کودک تا ۵ سالگی را از کل کم میکنیم (یعنی میخواهیم فرد تا ۱ سالگی و همچنین از ۱ تا ۵ سالگی فوت نکند) :

احتمال مرگ کودک در سال اول = ۰/۰۸ ، احتمال زنده ماندن تا ۱ سالگی = ۰/۹۲

احتمال مرگ کودک تا ۵ سالگی = ۰/۰۴ ، احتمال زنده ماندن از ۱ تا ۵ سالگی = ۰/۹۶

احتمال اینکه کودک **<u>حداقل</u>** ۵ سال عمر کند = ۰/۹۲ × ۰/۹۶

ج) در فاصله یک تا ۵ سال فوت کند ؟

یعنی فرد در سال اول زنده باشد (۰/۰۸ − ۱) **<u>و</u>** در ۱ تا ۵ سالگی فوت کند (۰/۰۴) : **P(A) = ۰/۰۴ × ۰/۹۲**

۸ . اگر جواب آزمایش برای افراد مبتلا به نوعی سرطان با احتمال ۰/۹۷ و برای افرادی که به این نوع سرطان مبتلا نیستند با احتمال ۰/۰۵ مثبت باشد ، چنانچه ۰/۰۲ بیماران در یک بیمارستان مبتلا به سرطان مورد بحث باشند و از این بیمارستان یک بیمار به صورت تصادفی انتخاب شود ، مطلوب است احتمال اینکه :

الف) جواب آزمایش برای این بیمار مثبت باشد ؟

A = جواب مثبت
فرد بیمار و جواب مثبت است
فرد سالم و جواب مثبت است

P(A) = $\underbrace{(۰/۰۲ \times ۰/۹۷)}_{\text{سرطانی با جواب مثبت}} + \underbrace{(۰/۰۵ \times ۰/۹۸)}_{\text{غیر سرطانی باجواب مثبت}}$ = ۰/۰۶۸

سرطانی و بیمار ـ احتمال جواب مثبت ـ احتمال جواب مثبت ـ غیر سرطانی و سالم

ب) در صورتی که جواب مثبت باشد ، بیمار انتخاب شده واقعا به این سرطان مبتلا باشد ؟

احتمال فرد واقعا بیمار = ۰/۹۷ × ۰/۰۲ = P(A)

احتمال مثبت بودن جواب = (۰/۰۲ × ۰/۹۷) + (۰/۰۵ × ۰/۹۸) = P(B)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.97 \times 0/02}{0.068} = ۰/۲۸۵$$

۹ . با توجه به اطلاعات مربوط به جدول زیر :

وزن / فشار خون	بالای نرمال	نرمال	پایین نرمال	
دارد	٪۱۰	٪۸	٪۲	٪۲۰
ندارد	٪۱۵	٪۴۵	٪۲۰	٪۸۰
	٪۲۵	٪۵۳	٪۲۲	٪۱۰۰

الف) احتمال اینکه فردی که به تصادف انتخاب شده مبتلا به فشار خون باشد چقدر است ؟

P(A) = ۰/۲

ب) احتمال اینکه فردی که انتخاب شده دارای فشار خون باشد به شرط اینکه وزن او بالای نرمال باشد ، چقدر است ؟

با توجه به جدول فوق ۲۵ ٪ جامعه وزن بالای نرمال دارند . حال مسئله شرطی بیان میکند و این شرط ، داشتن فشار خون است که از این ۲۵ ٪ جامعه ، تنها ۱۰ ٪ مبتلا به فشار خون هستند پس احتمال فشار خون داشتن فرد با وزن بالای نرمال برابر است با : $\frac{0.10}{0.25}$ = ۰/۴

ج) احتمال اینکه فرد فشار خون داشته باشد و وزن آن پایین نرمال باشد ؟ (یا وزن فرد پایین نرمال باشد به شرطی که فشار خون نداشته باشد) $\frac{0.2}{0.8} =$ ۰/۲۵

❖ توزیع احتمال :

توزیع احتمال هر متغیر تصادفی عبارت است از:

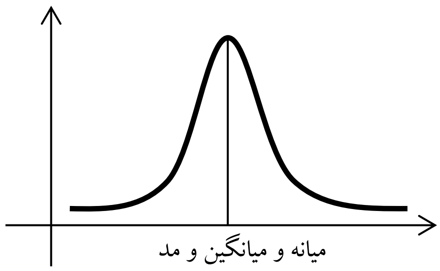
جدول ، نمودار ، فرمول ریاضی یا وسیله دیگری که همه مقادیر متغیر تصادفی را به همراه احتمالات مربوطه مشخص کند و بر اساس نوع متغیر تصادفی ما (گسسته و پیوسته) ، توزیع احتمال گسسته و پیوسته داریم .

از مشهورترین و کاربردی ترین توزیع های پیوسته به توزیع نرمال اشاره میکنیم :

❖ توزیع نرمال :

یکی از مهمترین توزیع های فراوانی برای کمیت های پیوسته ، **توزیع نرمال** است .

در نمودار این توزیع در محور افقی مقادیری است که میتواند برای متغیر تصادفی به وقوع بپیوندد (مثلا نمرات کلاس در درس آمار) و محور عمودی احتمال وقوع این مقادیر برای متغیر تصادفی است . نمودار هیستوگرام این توزیع زنگوله ای شکل است و حول نقطه میانگین متقارن است . پس نقطه میانگین بر قله این توزیع منطبق است و سه شاخص میانه و میانگین و مد برهم منطبق اند :



دامنه تغییرات این نمودار از ∞ – تا ∞ +است .

سطح زیر منحنی در این نمودار برابر ۱ است .

در توزیع های پیوسته از جمله توزیع نرمال ما هیچوقت احتمال در یک نقطه را نمیتوانیم حساب کنیم ، یعنی نمیتوانیم بگوییم به طور مثال یک فرد در کلاس آمار احتمال اینکه نمره اش ۱۵/۵ شود چقدر است و فقط میتوانیم احتمال بازده ها را حساب کنیم ، ولی در توزیع های گسترده احتمال در یک نقطه را میتوانیم حساب کنیم .

معادله توزیع نرمال (بیشتر بدانید) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

x : متغیری است که دارای توزیع نرمال است

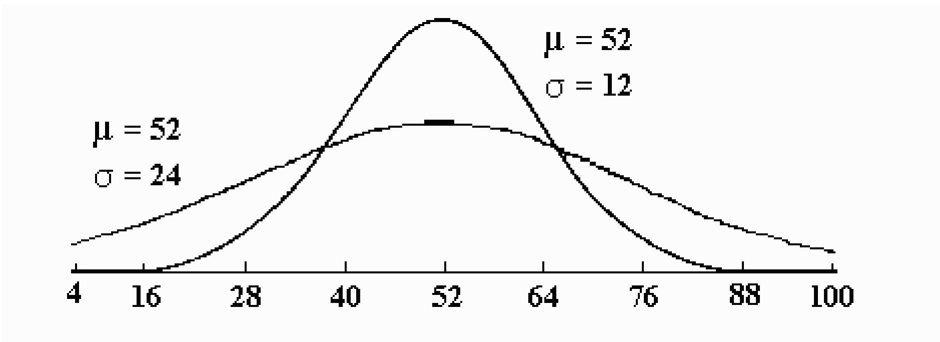
$-\infty < x < +\infty$ ، μ : میانگین ، σ : انحراف معیار ، π = ۳/۱۴ ، e = ۲/۷۱۸

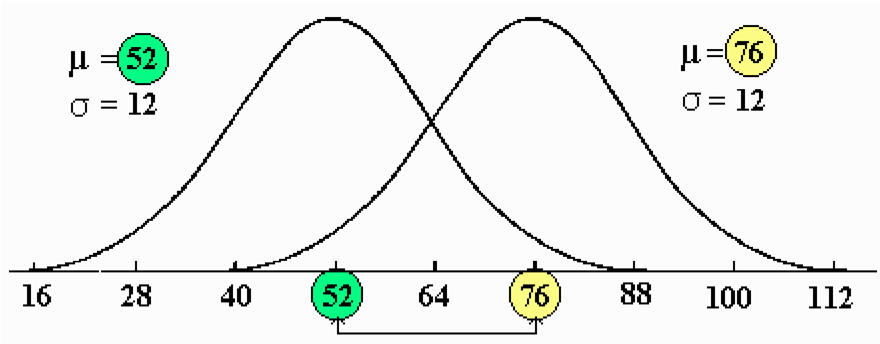
با دانستن μ و σ میتوان احتمال بین هر ۲ تعداد از متغیر را حساب نمود .

سوال : $\mathbf{X \sim N(\sigma, \mu)}$ یعنی چه ؟

یعنی منغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با **میانگین μ** و **انحراف معیار σ** است .

نکته : هرچقدر انحراف معیار بیشتر باشد ، یا به بیان دیگر پراکندگی داده ها بیشتر باشد ، قله توزیع پایین تر می آید و هرچه انحراف معیار کمتر باشد توزیع جمع تر میشود و قله توزیع بالاتر میرود ، ولی انحراف معیار در سطح زیر منحنی تاثیری ندارد و سطح زیر منحنی همواره برابر ۱ است :

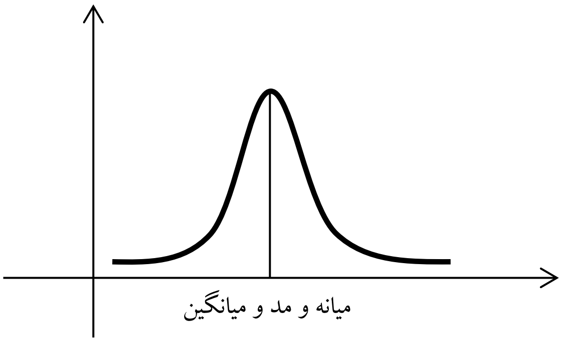




❖ **چاله درست شدن** :

توزیع نرمال دارای شکلی متقارن است و میانه (median) ، میانگین (mean) و مد (mode) برهم منطبق اند .

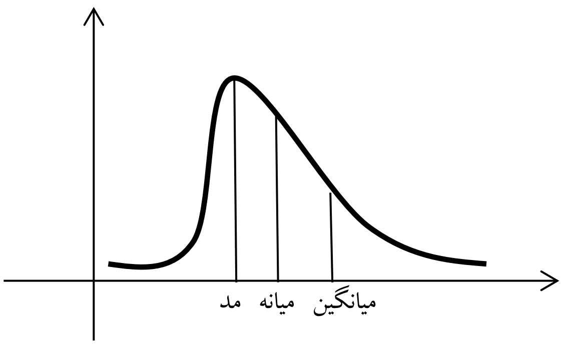
توزیع نرمال :



۲ حالت ممکن است در این نمودار حاصل شود :

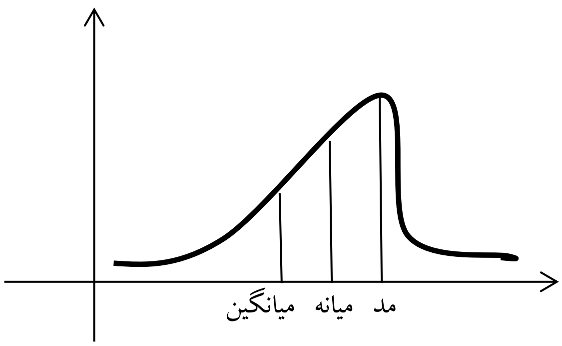
۱ . ایجاد چاله (چولگی) به راست : در این نمودار نما یا مد به سمت چپ جابجا میشود و به ترتیب از **چپ به راست** شاهد **مد و میانه و میانگین** هستیم و در نمودار **چاله ای در سمت راست** ایجاد میشود .

چاله به راست :



۲ . ایجاد چاله (چولگی) به چپ : در این توزیع نما یا مد به سمت راست جابجا میشود و از **چپ به راست** به ترتیب شاهد **میانگین و میانه و مد** هستیم و در نمودار **چاله ای در سمت چپ** ایجاد میشود .

چاله به چپ :



پایان