

# ریاضی فیزیک

# MATHEMATICAL PHYSICS



# ایران پویش

سامانه علمی، پژوهشی و کارآفرینی

مرجع تالیف و گرد آوری محتوای آموزشی

جزوات | درسنامه ها | نمونه سوالات | پکیج ارشد و دکتری

راههای تماس با ما:

وبسایت: [iranpuyesh.ir](http://iranpuyesh.ir)

ایمیل: [support@iranpuyesh.ir](mailto:support@iranpuyesh.ir)

تلگرام: [@iranpuyesh](https://t.me/iranpuyesh)

اینستاگرام: [@iranpuyesh](https://www.instagram.com/iranpuyesh)

واتس اپ: ۰۹۳۷۴۴۹۵۰۷۰

ریاضی فیزیک 1و2

---

Mathematical Physics 1&2

Sample

## فهرست مطالب

۱۰	..... فصل اول: بردارها	
10	..... جمع جبری	
10	..... تفریق	
10	..... جهت بردار	
12	..... ضرب اسکالر یا نقطه ای	
13	..... بردارهای متعامد	
13	..... تصاویر برداری	
14	..... خط های واقع در صفحه و فواصل نقطه ها از خط	
15	..... ضرب برداری	
16	..... قوانین شرکت پذیری و توزیع پذیری	
16	..... فرمول دترمینانی $A \cdot B$	
17	..... معادله خط در فضای سه بعدی	
18	..... فاصله یک نقطه از یک خط	
19	..... معادله خط	
19	..... زاویه بین دو صفحه	
21	..... نمونه سوالات تستی	
۲۵	..... فصل دوم: گرادیان	
25	..... 1-2 گرادیان	
28	..... دیورژانس $\vec{N} \times$	
38	..... پاسخنامه سوالات تستی	
40	..... پاسخنامه سوالات تستی	
۴۴	..... فصل سوم: انتگرال های چند گانه	
44	..... 1-3 انتگرال های دو گانه	
44	..... انتگرال های دو گانه روی نواحی مستطیلی	
45	..... ویژگی های انتگرال های دو گانه	
47	..... تعبیر انتگرال های دو گانه به صورت حجم	
47	..... قضیه فوبینی در مورد محاسبه انتگرال های دو گانه	
48	..... قضیه فوبینی (صورت اول)	
49	..... 2-3 انتگرال های دو گانه روی نواحی غیر مستطیلی محصور	
50	..... قضیه فوبینی (صورت قوی تر)	
53	..... 3-3 مساحت و مرکز جرم در دو بعد	
54	..... 4-3 گشتاور اول و دوم مرکز جرم در صفحه	
54	..... شعاع های چرخش	

57	..... 5-3 انتگرال دو گانه به صورت قطبی
57	..... انتگرال ها در مختصات قطبی
59	..... (6-3) تبدیل انتگرال های دکارتی به قطبی
60	..... جانمایی در انتگرال های دو گانه
66	..... (7-3) انتگرال های سه گانه در مختصات قائم
66	..... انتگرال های سه گانه
66	..... ویژگی های انتگرال های سه گانه
67	..... حجم یک ناحیه در فضا
67	..... محاسبه انتگرال های سه گانه
70	..... پاسخنامه سوالات تستی
73	..... پاسخنامه سوالات تستی
۷۹	..... <b>فصل چهارم: جبر خطی و فضاهای برداری</b>
79	..... جبر خطی و ماتریس
80	..... برابری دو ماتریس
80	..... جمع و تفریق دو ماتریس
81	..... ضرب دو ماتریس
83	..... تعریف ماتریس I
83	..... ویژگی ماتریس I
83	..... تعریف معکوس یک ماتریس
84	..... ترنسپس یک ماتریس (Transpose)
84	..... تعریف ماتریس متقارن
84	..... تعریف ماتریس پاد متقارن
86	..... تعریف ماتریس Hermition
86	..... تعریف ماتریس پاد هرمیشن
87	..... دترمینان یک ماتریس
90	..... نمونه سوالات تستی
92	..... پاسخنامه سوالات تستی
۹۵	..... <b>فصل پنجم: تابع های برداری و حرکت</b>
95	..... تابع های برداری و حرکت
95	..... سرعت یک پرتابه ایده آل
96	..... مشتق یک تابع برداری
99	..... پیدا کردن زاویه بین بردار سرعت و بردار شتاب در یک لحظه خاص
100	..... فاصله جهت دار و بردار مماس واحد T
100	..... فاصله جهت دار روی یک خم
101	..... تعریف: طول یک خم
102	..... بردار مماس واحد T
105	..... نمونه سوالات تستی

106	پاسخنامه سوالات تستی
108	حد توابع
108	چند قضیه مهم ریاضی:
117	مقایسه بی نهایت کوچک ها
119	بی نهایت کوچک های معادل یا هم ارز
119	لیست توابع بی نهایت کوچک با معادل هر کدام
121	پیوستگی توابع
121	نقاط انفصال نوع اول
122	نقاط انفصال نوع دوم
123	نمونه سوالات تستی
124	پاسخنامه سوالات تستی
۱۲۷	<b>فصل ششم: معادلات دیفرانسیل</b>
128	1-6) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
128	معادلات تفکیک پذیر
131	2-6) معادلات همگن
140	3-6) معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول
147	معادله دیفرانسیل مرتبه اول
149	4-6) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر
149	معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم
151	معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت
156	5-6) معادلات خطی همگن از مرتبه دلخواه $n$ با ضرایب ثابت
161	6-6) معادلات خطی غیر همگن مرتبه دوم
163	روش ضرایب نامعین
166	مجموعه تست
170	پاسخنامه سوالات تستی
180	منابع

Sample



Sample

## فصل اول: بردارها

یک بردار پاره خطی است، جهت دار. که هر بردار شامل طول و جهت می باشد.

چنانچه دو بردار همسنگ یا یکی باشند، آن دو طول مساوی داشته و موازی بوده و هم جهت می باشند.

تعریف: برابری بردارها

$$a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} = a'\hat{i} + b'\hat{j} + c'\hat{k} \Rightarrow a = a', b = b', c = c'$$

### جمع جبری

دو بردار را می توان از طریق جبری با افزودن مؤلفه های عددی متناظرشان به یکدیگر با هم جمع کرد.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k} \\ \vec{v}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + a_2)\hat{i} + (b_1 + b_2)\hat{j} + (c_1 + c_2)\hat{k}$$

### تفریق

قرینه بردار  $v$  بردار  $-v$  است که طولی برابر طول  $v$  دارد اما جهت آن مخالف جهت  $v$  است.

برای کم کردن بردار  $v_2$  از بردار  $v_1$ ،  $-v_2$  را به  $v_1$  می افزاییم.

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

و مانند جمع جبری با آن رفتار می کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k} \\ \vec{v}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (a_1 - a_2)\hat{i} + (b_1 - b_2)\hat{j} + (c_1 - c_2)\hat{k}$$

طول بردار  $v = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$  را معمولاً با  $|v|$  نشان می دهند که می توان آن را اندازه  $v$  خواند.

$$|v| = |a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

### جهت بردار

جهت بردار ناصفر  $A$  بردار واحدی است که از تقسیم  $A$  بر طولش به دست می آید:

$$\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \mathbf{A} \text{ جهت بردار}$$

برای یافتن بردار بین دو نقطه مطابق شکل زیر عمل می کنیم:

نقطه  $P_1$  به مختصات داده شده است:

$$P_1(x_1, y_1, z_1)$$

نقطه  $P_2$  به مختصات داده شده است:

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ : فاصله بین دو نقطه}$$

مثال (1-1): مطلوبست بردار واحد  $\mathbf{U}$  که در جهت بردار از  $P_1(3,0,3)$  تا  $P_2(2,1,0)$  باشد.

حل:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2-3)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + (0-3)\hat{k}$$

$$= -\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

$$\mathbf{U} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{-\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{11}}\hat{j} - \frac{3}{\sqrt{11}}\hat{k}$$

مثال (2-1): مطلوبست برداری به طول 12 واحد در جهت بردار  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

حل:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$$

$$12 \times \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = 12\left(\frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}\right) = 8\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}$$

## ضرب اسکالر یا نقطه ای

اینک در پی تعریف بردارها، به ترکیب آن ها در یکدیگر اقدام می کنیم. قوانین مربوط به ترکیب بردارها باید از نظر ریاضی سازگار باشد.

با ترکیب  $AB\cos\theta$  که در آن  $A$  و  $B$  بزرگی دو بردار و  $\theta$  زاویه بین آن ها است، در فیزیک زیاد برخورد می کنیم:

$$\cos\theta \times \text{جا به جایی} \times \text{نیرو} = \text{کار}$$

با در نظر داشتن چنین کاربردهایی، ضرب اسکالر یا نقطه ای یا داخلی بنا به تعریف عبارت است از:

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_i A_i B_i$$

حاصل ضرب اسکالر دو بردار، یک کمیت اسکالر است. توجه می کنیم که بنابراین تعریف داریم:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

یعنی ضرب اسکالر تعویض پذیر است.

بردارهای یگه  $i, j, k$  در روابط زیر صدق می کنند.

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

در حالی که

$$i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$$

$$j \cdot i = k \cdot i = k \cdot j = 0$$

می توان به راحتی نشان داد:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

اثبات:

$$\mathbf{r} \\ \mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\mathbf{r} \\ \mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3) \quad \text{فرض می کنیم}$$

$$\mathbf{r} \\ \mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot ((b_1 + c_1)\hat{i} + (b_2 + c_2)\hat{j} + (b_3 + c_3)\hat{k})$$

$$= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$$

$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)$$

$$= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

## بردارهای متعامد

دو بردار که حاصل ضرب اسکالری آن‌ها برابر صفر است متعامد هستند، زیرا که  $(\cos 90^\circ = 0)$

مثال (3-1): زاویه بین بردارهای  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  را به دست آورید:

$$\mathbf{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\mathbf{B} = 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{j} + 4\hat{k}) = 3(0) - 2(2) + 1(4) = 0$$

دو بردار متعامد هستند  $\Rightarrow$  چون ضرب داخلی دو بردار صفر شده است  $\Rightarrow$

## تصاویر برداری

برداری که از تصویر کردن برداری مانند  $\mathbf{B}$  بر راستای برداری مانند  $\mathbf{A}$  به دست می‌آید، تصویر برداری  $\mathbf{B}$  بر  $\mathbf{A}$  نامیده می‌شود. اگر زاویه بین دو بردار  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  حاده باشد تصویر برداری  $\mathbf{B}$  بر  $\mathbf{A}$  برابر است با  $|\mathbf{B}|\cos\theta$  و اگر زاویه بین دو بردار منفرجه باشد کسینوسش منفی است و طول تصویر برداری  $\mathbf{B}$  بر  $\mathbf{A}$  برابر است با  $-|\mathbf{B}|\cos\theta$ .

شکل

شکل

مؤلفه عددی  $\mathbf{B}$  در جهت  $\mathbf{A}$  را می‌توان از تقسیم طرفین رابطه  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$  به دست آورد.

$$|\mathbf{B}|\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|} = \mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

مثال (4-1):

تصویر برداری  $\mathbf{B} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$  را بر  $\mathbf{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$  به دست آورید.

$$\mathbf{A} \text{ بردار } \mathbf{B} \text{ بر } \mathbf{A} \text{ تصویر} = |\mathbf{B}|\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|} = \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = \frac{6 - 4 + 4}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

اما این مقدار اندازه تصویر می‌باشد.

برای به دست آوردن بردار تصویر  $\mathbf{B}$  بر  $\mathbf{A}$  باید این عدد را در بردار یگانه  $\mathbf{A}$  ضرب کنیم.

$$\mathbf{A} \text{ بر } \mathbf{B} \text{ تصویر} = \mathbf{B}\cos\theta = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = 2 \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{4}{3}\hat{k}$$

## خط های واقع در صفحه و فواصل نقطه ها از خط

ضرب عددی بردارها روش نوینی برای درک معادلات خطوط واقع در صفحه و نیز راه سریعی برای محاسبه فواصل نقاط تا خطوط به دست می دهد.

فرض می کنیم  $L$  خطی باشد که از نقطه  $P_0(x_0, y_0)$  می گذرد و بردار  $N = a\hat{i} + b\hat{j}$  عمود است.

نقطه ای دلخواه به مختصات  $P(x, y)$  بر این خط واقع است.

که خواهیم داشت:

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

از این معادله برای به دست آوردن معادله خط استفاده می شود.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$ax + by = ax_0 + by_0$$

در این صورت  $ax + by = c$  که  $ax_0 + by_0 = c$

مثال (۱-۵):

معادله خط گذرنده از  $P_0(3,5)$  و عمود بر  $\vec{N} = \hat{i} + 2\hat{j}$  را بیابید.

حل:

$$((x - 3)\hat{i} + (y - 5)\hat{j}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j}) = 0$$

$$(x - 3)1 + (y - 5)2 = 0 \quad x - 3 + 2y - 10 = 0$$

$$x + 2y = 10 + 3 = 13 \Rightarrow x + 2y = 13$$

چنانچه نقطه ای به مختصات  $P(x_0, y_0)$  فاصله اش از خطی به معادله  $ax + by = c$  خواسته شود:

حل: ابتدا یک نقطه دلخواه مانند  $R$  که در معادله خط صدق کند را انتخاب می کنیم.  $R = (x, y)$

آن گاه تصویر بردار  $\overrightarrow{RP}$  بر بردار عمود بر خط همان فاصله نقطه  $P$  از خط می باشد.

$$\text{فاصله نقطه } P \text{ از خطی که بر } \vec{N} \text{ عمود باشد} = \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|}$$

مثال (۱-۶):

فاصله نقطه  $(1,2)$  را از خط  $2x + y = 10$  به دست آورید:

حل: ابتدا یک نقطه دلخواه روی خط در نظر می گیریم  $R = (5,0)$

آن گاه فاصله نقطه  $P$  از خط به قرار زیر است:

$$\text{فاصله } P \text{ از خط} = \frac{|\vec{R} \cdot \vec{P} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|} = \frac{|((5-1)\hat{i} + (0-2)\hat{j}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j})|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}} = \frac{|10-2|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

### ضرب برداری

اگر  $A$  و  $B$  موازی نباشند صفحه ای را مشخص می کنند. بردار واحد  $\hat{n}$  را عمود بر این صفحه طبق قانون دست راست بر می گزینیم. با این ترتیب که  $\hat{n}$  را آن بردار واحد قائم می گیریم که انگشتان دست راست ما روی زاویه  $\theta$  در جهت از  $A$  به  $B$  خم شود، این بردار در جهت انگشت شست ما باشد.

$$\vec{A} \times \vec{B} = n |A| |B| \sin \theta$$

$\theta$  زاویه بین دو بردار  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  می باشد.

توجه شود که در ضرب برداری جا به جا شدن بردارها سبب قرینه شدن نتیجه می شود.

$$\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B})$$

بر خلاف ضرب اسکالر، ضرب برداری تعویض پذیر نیست.

با استفاده از تعریف ضرب برداری در مورد بردارهای واحد  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  داریم:

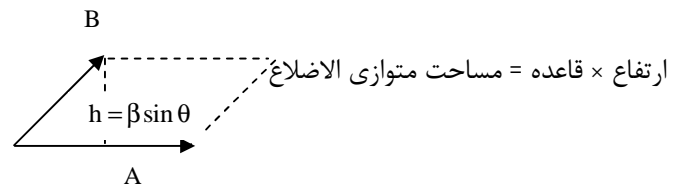
$$\hat{i} \times \hat{j} = -(\hat{j} \times \hat{i}) = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = -(\hat{k} \times \hat{j}) = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -(\hat{i} \times \hat{k}) = \hat{j}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$|\vec{A} \times \vec{B}|$  مساحت متوازی الاضلاعی است که اضلاع آن بردارهای  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  می باشد.



$$|\vec{A} \times \vec{B}| \sin \theta$$

$$\Rightarrow |\text{مساحت متوازی الاضلاع}| = |A| |B| \sin \theta = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

## قوانین شرکت پذیری و توزیع پذیری

طبق قاعده ضرب برداری خاصیت شرکت پذیری ندارد. چنانچه می دانیم  $(A \times B) \times C$  در صفحه  $A$  و  $B$  قرار دارد. حال آن که  $A \times (B \times C)$  در صفحه  $B$  و  $C$  است. اما:

$$(rA) \times (sB) = (rs)A \times B$$

در مورد ضرب برداری، قوانین توزیع پذیری برداری برقرار است.

$$\begin{aligned} A \times (B + C) &= A \times B + A \times C \\ (B + C) \times A &= B \times A + C \times A \end{aligned}$$

فرمول دترمینانی  $A \times B$ :

حال هدف ما این است که نشان دهیم مؤلفه های  $A \times B$  را چگونه از مؤلفه های  $A$  و  $B$  به دست آوریم:

$$A = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}, \quad B = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

$$A \times B = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\hat{i} \times \hat{i}) + a_1b_2(\hat{i} \times \hat{j}) + a_1b_3(\hat{i} \times \hat{k}) + a_2b_1(\hat{j} \times \hat{i}) + a_2b_2(\hat{j} \times \hat{j}) + a_2b_3(\hat{j} \times \hat{k}) + a_3b_1(\hat{k} \times \hat{i}) + a_3b_2(\hat{k} \times \hat{j}) + a_3b_3(\hat{k} \times \hat{k})$$

$$= 0 + a_1b_2\hat{k} + a_1b_3(-\hat{j}) + a_2b_1(-\hat{k}) + 0 + a_2b_3(\hat{i}) + a_3b_1(\hat{j}) + a_3b_2(-\hat{i}) + 0$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

این جمله همان دترمینان مقابل است:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بنابراین برای تشکیل ضرب برداری می توان از تشکیل دترمینانی با اعضای مربوطه بهره برد.

مثال (۷-۱):

مساحت مثلثی سه رأس آن  $P(+1,1,0)$  و  $Q(3,5,1)$  و  $M(7,2,3)$  می باشد. مطابق  $P$  و  $Q$  و  $M$  هستند را بیابید:

حل:

$$\vec{MP} = (7-1)\hat{i} + (2-1)\hat{j} + (3-0)\hat{k} = 6\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{QP} = (3-1)\hat{i} + (5-1)\hat{j} + \hat{k} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$$



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{|\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{QP}|}{2}$$

$$\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1 - 4 \times 3)\hat{i} + (3 \times 2 - 6 \times 1)\hat{j} + (6 \times 4 - 2 \times 1)\hat{k} = -11\hat{i} + 0\hat{j} + 22\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{QP}| = \sqrt{(-11)^2 + (0)^2 + (22)^2} = 11\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{11\sqrt{5}}{2}$$

### معادله خط در فضای سه بعدی

فرض می کنیم  $L$  خطی باشد که از نقطه  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  بگذرد و موازی با بردار  $V = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$  باشد. پس  $L$  مجموعه نقطه ای است که مانند  $P(x, y, z)$  بردار  $\overrightarrow{PP_0}$  موازی با  $\hat{V}$  باشد.

توجه: در اینجا برخلاف نمونه های قبلی ما برداری را که خط بر آن عمود می باشد را نداریم بلکه هادی خط را داریم:

$$\overrightarrow{P_0P} = tv$$

اگر این معادله را بر حسب مؤلفه ها بنویسیم خواهیم داشت:

$$(x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k} = t(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k})$$

$$x - x_0 = tA \quad y - y_0 = tB \quad z - z_0 = tC$$

$$x = x_0 + tA, \quad y = y_0 + tB, \quad z = z_0 + tC$$

مثال (۱-۸):

معادلات پارامتری خط گذرنده از نقطه  $(5, 1, 2)$  و موازی با بردار  $\hat{V}$  را بیابید. ( $V = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ )

حل:

$$A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$$

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (5, 1, 2)$$

$$\Rightarrow x = 5 + 2t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 2 - t$$

## فاصله یک نقطه از یک خط

برای یافتن فاصله نقطه  $P$  از خط  $L$  گام های زیر را بر می داریم:

گام 1: نقطه  $Q$  را روی  $L$  چنان بر می گزینیم که نزدیک ترین فاصله را تا  $P$  داشته باشد.

گام 2: فاصله  $P$  تا  $Q$  را محاسبه می کنیم.

مثال (1-9):

فاصله نقطه  $P(1,5)$  را از خط زیر بیابید.

$$x=1+t, y=3-t, z=t$$

گام 1: ابتدا نقطه  $Q$  را از خط انتخاب می کنیم، که بر خط منطبق است.

$$Q(1+t, 3-t, t)$$

می خواهیم مقداری از  $t$  را بیابیم که به ازای آن فاصله  $P$  و  $Q$  مینیمم شود.

بنابراین:

$$f(t) = \sqrt{(1+t-1)^2 + (3-t-5)^2 + (t-5)^2}$$

$f(t)$  وقتی مینیمم می شود که عبارت زیر رادیکال مینیمم شود.

$$L(t) = t^2 + (2-t)^2 + (t-5)^2$$

حال مشتق می گیریم و مشتق را برابر صفر قرار می دهیم.

$$L'(t) = 0 = 2t + 2(2-t)(-1) + 2(t-5)$$

$$= 2t - 4 + 2t + 2t - 10 = 6t - 14 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{3}$$

حال  $t$  به دست آمده را در  $f(t)$  قرار می دهیم تا فاصله به دست آید.

$$f(t) = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - 5\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{114}}{3} = \frac{\sqrt{114}}{3}$$

**معادله خط**

فرض می کنیم  $M$  صفحه ای در فضا است که از نقطه  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  می گذرد و بر بردار  $N = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$  عمود است. (قائم)، پس مجموعه ای از نقاط مانند  $P(x, y, z)$  در صورتی تشکیل صفحه  $M$  را می دهند که بردار  $\overrightarrow{P_0P}$  بر  $N$  عمود باشد.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

$$Ax + By + Cz = D \quad , \quad D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

که کادر بالا معادله صفحه را نشان می دهد.

مثال (۱-۱۰):

معادله صفحه ای را بیابید که از  $P_0(-3, 0, 6)$  بگذرد و بر  $N = 5\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  عمود باشد.

حل:

$$((x - (-3))\hat{i} + (y - 0)\hat{j} + (z - 6)\hat{k}) \cdot (5\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow 5(x + 3) + 2y + (z - 6) = 0$$

$$5x + 2y + z = -15 + 0 + 6 = -9$$

$$5x + 2y + z = -9$$

**زاویه بین دو صفحه**

بنا بر تعریف زاویه ای که بین دو صفحه متقاطع تشکیل می شود، زاویه حاده ای است که دو بردار قائم آن ها با هم می سازند.

مثال (۱-۱۱):

زاویه بین دو صفحه  $3x + 6y - 2z = 30$  و  $2x + y + 2z = 72$  را تعیین کنید.

حل:

$$N_1 = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$N_2 = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

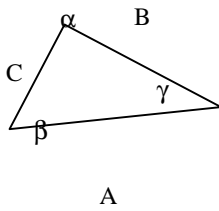
حال باید زاویه بین دو بردار  $\vec{N}_1$  و  $\vec{N}_2$  را به دست آوریم:

$$\cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{9+36+4} \times \sqrt{4+1+4}} = \frac{6+6-4}{7 \times 3} = \frac{8}{21} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{8}{21}$$

### قانون سینوس ها

اگر در یک مثلث اندازه سه ضلع به ترتیب  $A$ ،  $B$  و  $C$  باشد و اندازه زوایای روبرو به ضلع های مثلث به ترتیب  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$

$\gamma$  باشد مطابق شکل:



رابطه بین اندازه اضلاع و سینوس زوایا مطابق زیر خواهد بود:

$$\frac{\sin \alpha}{A} = \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \gamma}{C}$$

## نمونه سوالات تستی

۱- تصویر برداری  $\mathbf{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  بر  $\mathbf{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$  کدام می باشد؟

$$(1) \quad -\frac{1}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k} \quad (2) \quad -\frac{1}{9}\hat{i} - \frac{2}{9}\hat{j} + \frac{2}{9}\hat{k}$$

$$(3) \quad +\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k} \quad (4) \quad +\frac{1}{9}\hat{i} + \frac{2}{9}\hat{j} - \frac{2}{9}\hat{k}$$

۲- معادله خط گذرنده از  $P(3, 1, 2)$  و عمود بر  $\mathbf{N} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$  را بیابید.

$$(1) \quad x + 2y + z = 7 \quad (2) \quad x + 2y + z = -7$$

$$(3) \quad x - 2y + z = -7 \quad (4) \quad -x + 2y + z = -7$$

۳- فاصله نقطه  $P(5, 3)$  را از خط  $x + 3y = 6$  بیابید.

$$(1) \quad \frac{8\sqrt{10}}{10} \quad (2) \quad -\frac{2}{\sqrt{10}} \quad (3) \quad \frac{8}{\sqrt{10}} \quad (4) \quad +\frac{2\sqrt{10}}{10}$$

۴- مطلوب است معادلات پارامتری خطی که از نقاط  $P(3, 2, 3)$  و  $Q(1, -1, 4)$  می گذرد:

$$(1) \quad \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -3t + 3 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = -3t - 1 \\ z = -t + 4 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -3t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = -3t - 1 \\ z = t - 4 \end{cases}$$

۵- زاویه بین صفحات  $6x + 6y - 3z + 5 = 0$  و  $x - 2y + 2z - 4 = 0$  برابر است با:

$$(1) \quad \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) \quad (2) \quad \arccos\left(-\frac{9}{4}\right) \quad (3) \quad \pi - \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) \quad (4) \quad \pi - \arccos\left(-\frac{9}{4}\right)$$

۶- برداری موازی فصل مشترک دو صفحه  $3x - 6y - 2z = 64$  و  $2x + y - 2z = 25$  کدام گزینه می باشد؟

$$(1) \quad 14\hat{i} - 2\hat{j} + 15\hat{k} \quad (2) \quad 14\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k} \quad (3) \quad 14\hat{i} + 2\hat{j} - 15\hat{k} \quad (4) \quad 7\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$$

۷- معادلات پارامتری فصل مشترک دو صفحه  $3x - 6y - 2z = 15$  و  $3x + y + z = -6$  کدام می تواند باشد؟

$$(1) \quad \begin{cases} x = -4t + 11 \\ y = 9t + 3 \\ z = 21t \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x = 4t + 11 \\ y = 9t + 3 \\ z = -21t \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x = -4t + 11 \\ y = -9t + 3 \\ z = 21t \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x = -4t + 11 \\ y = -9t + 3 \\ z = 3t \end{cases}$$

۸- با استفاده از قانون سینوس ها داریم:

$$(1) \quad \frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma} \quad (2) \quad C \sin \alpha = B \sin \gamma = A \sin \beta$$

$$(3) \quad A \sin \alpha = B \sin \beta = C \sin \gamma \quad (4) \quad \frac{\sin \alpha}{A} = \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \gamma}{C}$$

۹- سه بردار زیر داده شده است  $A(1, 2, 3)$  و  $B(0, 1, 5)$  و  $C(1, 2, 3)$  برداری پیدا کنید که بر  $\mathbf{A}$  عمود بوده و در صفحه

$\mathbf{B}$  و  $\mathbf{C}$  واقع باشد.

$$(1) \quad 2\mathbf{B} - \mathbf{C} \quad (2) \quad 6\mathbf{B} - 17\mathbf{C} \quad (3) \quad 5\mathbf{B} + 8\mathbf{C} \quad (4) \quad 12\mathbf{B} - \mathbf{C}$$

## پاسخنامه سوالات تستی

۱- حل: گزینه ۲ صحیح می باشد زیرا:

$$A \cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \text{اندازه تصویر} = \frac{(3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}} = \frac{3(1) - 1(2) + 1(-2)}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{بردار تصویر} = a \cos \theta \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = -\frac{1}{3} \frac{(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}} = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k} \right) = -\frac{1}{9}\hat{i} - \frac{2}{9}\hat{j} + \frac{2}{9}\hat{k}$$

۲- حل: گزینه ۱ صحیح می باشد زیرا:

$$\overrightarrow{PP_0} \cdot \mathbf{N} = 0 \Rightarrow ((x-3)\hat{i} + (y-1)\hat{j} + (z-2)\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)1 + (y-1)2 + (z-2)1 = 0$$

$$x - 3 + 2y - 2 + z - 2 = 0 \Rightarrow x + 2y + z = 7$$

۳- حل: گزینه ۱ صحیح می باشد زیرا:

ابتدا یک نقطه دلخواه روی خط در نظر می گیریم:  $\mathbf{R} = (0, 2)$

آن گاه داریم:

$$\left| \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} \right| = \frac{((0-5)\hat{i} + (2-3)\hat{j}) \cdot (1\hat{i} + 3\hat{j})}{\sqrt{(1)^2 + (3)^2}} = \frac{(5\hat{i} - \hat{j}) \cdot (1\hat{i} + 3\hat{j})}{\sqrt{10}} = \frac{-5 - 3}{\sqrt{10}} = -\frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{10}$$

از آن جا که فاصله منفی نمی باشد آن عدد را با علامت + در نظر می گیریم یعنی: فاصله =

۴- حل: گزینه ۳ صحیح می باشد زیرا:

$$\overrightarrow{PQ} = (1-3)\hat{i} + (-1-2)\hat{j} + (4-3)\hat{k} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

خط موازی با بردار  $\overrightarrow{PQ}$  است.

بنابراین:

$$x = -2t + 3$$

$$y = -3t + 2$$

$$z = t + 3$$

۵- حل: گزینه ۳ صحیح می باشد زیرا:

$$\mathbf{N}_1 = 6\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\mathbf{N}_2 = 1\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\cos \theta = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1| |N_2|} = \frac{(6\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{36+36+9} \times \sqrt{1+4+4}} = \frac{6-12-6}{9 \times 3} = -\frac{12}{9 \times 3} = -\frac{4}{9}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$$

ولی توجه شود که در اینجا زاویه ما از  $90^\circ$  بیشتر شده است بنابراین باید زاویه ای که حاصل جمعش با آن  $180^\circ$  می شود را به عنوان زاویه صفحات اعلام کنیم.

$$\Rightarrow \theta = \pi - \arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$$

۶- حل: گزینه ۲ صحیح می باشد زیرا:

$$N_1 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$N_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

فصل مشترک دو صفحه بر نرمال هر یک از صفحات عمود می باشد.

$$\Rightarrow A = (N_1 \times N_2) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$$

۷- حل: گزینه ۳ صحیح می باشد زیرا:

فصل مشترک بر نرمال هر دو صفحه عمود می باشد.

$$N_1 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$N_2 = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{A} = N_1 \times N_2$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - 9\hat{j} + 21\hat{k}$$

حال که هادی فصل مشترک به دست آمد کافی است نقطه ای را بیابیم که در هر دو صفحه باشد.

برای مثال  $(z=0)$  فرض شود.

$$\begin{cases} 3x - 6y = 15 \\ 3x + y = -6 \end{cases} \Rightarrow -7y = 21 \Rightarrow y = 3$$

$$3x - 6(3) = 15 \Rightarrow x = \frac{33}{3} = 11$$

در نتیجه نقطه ای که روی هر دو صفحه باشد  $(11,3,0)$  می باشد که این یکی از نقاط است.

$$x = -4t + 11$$

$$y = -9t + 3$$

$$z = 21t$$

۸- حل: گزینه ۴ مطابق نکته های ارائه شده درست است.

۹- حل:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$$

ابتدا برداری را می یابیم که در صفحه  $(B,C)$  عمود باشد.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -17\hat{i} - 20\hat{j} + 19\hat{k}$$

سپس برداری را پیدا می کنیم که هم بر  $A$  عمود بوده و هم بر صفحه  $(B,C)$  عمود باشد.

حال به دنبال گزینه ای هستیم که با بردار بالا موازی باشد.

$$2\mathbf{B} - \mathbf{C} = (0,2,10) + (-1,-2,-3) = (-1,0,7)$$

$$6\mathbf{B} - 17\mathbf{C} = (0,6,30) + (-17,-34,-51) = (-17,-28,-21)$$

$$5\mathbf{B} + 8\mathbf{C} = (0,5,25) + (8,16,24) = (8,21,49)$$

$$12\mathbf{B} - \mathbf{C} = (0,12,60) + (-1,-2,-3) = (-1,10,57)$$

همان طور که دیده می شود هیچ کدام از بردارهای داده شده با بردار  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  موازی نیست و هیچ کدام از گزینه ها

صحیح نمی باشد.