# ریاضی فیزیک

# MATHEMATICAL PHYSICS

iranpuyesh.ir

ریاضی فیزیک 1و2

Mathematical Physics 1&2

# فهرست مطالب

## فصل اول:بردارها

یک بردار پاره خطی است، جهت دار. که هر بردار شامل طول و جهت می باشد.

چنانچه دو بردار همسنگ یا یکی باشند، آن دو طول مساوی داشته و موازی بوده و هم جهت می باشند.

**تعریف:** برابری بردارها

$$ai + bj + c\hat{k} = a'i + b'\hat{j} + c'k \quad \Rightarrow \quad a = a', b = b', c = c'$$

### جمع جبری

دو بردار را می توان از طریق جبری با افزودن مؤلفه های عددی متناظرشان به یکدیگر با هم جمع کرد.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_1} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k} \\ \overrightarrow{v_2} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (a_1 + a_2)\hat{i} + (b_1 + b_2)\hat{j} + (c_1 + c_2)\hat{k}$$

### تفریق

قرینه بردار $v$ بردار $-v$ است که طولی برابر طول $v$ دارد اما جهت آن مخالف جهت $v$ است.

برای کم کردن بردار $v_2$ از بردار $v_1$، $-v_2$ را به $v_1$ می افزاییم.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{v_1} + (-\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$$

و مانند جمع جبری با آن رفتار می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_1} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k} \\ \overrightarrow{v_2} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = (a_1 - a_2)\hat{i} + (b_1 - b_2)\hat{j} + (c_1 - c_2)\hat{k}$$

طول بردار $v = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ را معمولاً با $|v|$ نشان می دهند که می توان آن را اندازه $v$ خواند.

$$|v| = |a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

### جهت بردار

جهت بردار ناصفر $A$ بردار واحدی است که از تقسیم $A$ بر طولش به دست می آید:

جهت بردار $A = \frac{A}{|A|}$

برای یافتن بردار بین دو نقطه مطابق شکل زیر عمل می کنیم:

نقطه $P_1$ به مختصات داده شده است:

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

نقطه $P_2$ به مختصات داده شده است:

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

فاصله بین دو نقطه : $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

مثال (1-1): مطلوبست بردار واحد $U$ که در جهت بردار از $P_1(3,0,3)$ تا $P_2(2,1,0)$ باشد.

حل:

$\overrightarrow{P_1P_2} = (2-3)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + (0-3)\hat{k}$

$= -\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

$\vec{U} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|P_1P_2|} = \frac{-\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{11}}\hat{j} - \frac{3}{\sqrt{11}}\hat{k}$

مثال (2-1): مطلوبست برداری به طول 12 واحد در جهت بردار $\vec{A}$

$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

حل:

$|A| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\frac{A}{|A|} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$

$12 \times \frac{A}{|A|} = 12(\frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}) = 8\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}$

## ضرب اسکالر یا نقطه ای

اینک در پی تعریف بردارها، به ترکیب آن ها در یکدیگر اقدام می کنیم. قوانین مربوط بـه ترکیـب بردارهـا بایـد از نظـر ریاضی سازگار باشد.

با ترکیب $AB\cos\theta$ که در آن $A$ و $B$ بزرگی دو بردار و $\theta$ زاویه بین آن ها است، در فیزیک زیاد برخورد می کنیم:

$\cos\theta$ × جا به جایی × نیرو = کار

با در نظر داشتن چنین کاربردهایی، ضرب اسکالر یا نقطه ای یا داخلی بنا به تعریف عبارت است از:

$$A\cdot B = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \sum_i A_iB_i$$

حاصل ضرب اسکالر دو بردار، یک کمیت اسکالر است. توجه می کنیم که بنابراین تعریف داریم:

$$A\cdot B = B\cdot A$$

یعنی ضرب اسکالر تعویض پذیر است.

بردارهای یکّه $k$ , $j$ , $i$ در روابط زیر صدق می کنند.

$$i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1$$

در حالی که

$$i\cdot j = i\cdot k = j\cdot k = 0$$
$$j\cdot i = k\cdot i = k\cdot j = 0$$

می توان به راحتی نشان داد:

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$

اثبات:

فرض می کنیم:
$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$A\cdot(B+C) = A\cdot((b_1+c_1)\hat{i} + (b_2+c_2)\hat{j} + (b_3+c_3)\hat{k})$$

$$= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3)$$
$$= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3$$
$$= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)$$
$$= \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

### بردارهای متعامد

دو بردار که حاصل ضرب اسکالری آن ها برابر صفر است متعامد هستند، زیرا که (cos90=0)

مثال (1-3): زاویه بین بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به دست آورید:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + k$$
$$\vec{B} = 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{j} + 4\hat{k}) = 3(0) - 2(2) + 1(4) = 0$$

دو بردار متعامد هستند $\Leftarrow$ چون ضرب داخلی دو بردار صفر شده است $\Leftarrow$

### تصاویر برداری

برداری که از تصویر کردن برداری مانند $B$ بر راستای برداری مانند $A$ به دست می آید، تصـویر رداری $B$ بـر $A$ نامیـده می شود. اگر زاویه بین دو بردار $A$ و $B$ حاده باشد تصویر برداری $B$ بر $A$ برابر است بـا $|B|\cos\theta$ و اگـر زاویـه بـین دو بردار منفرجه باشد کسینوسش منفی است و طول تصویر برداری $B$ بر $A$ برابر است با $-|B|\cos\theta$

شکل　　　　　　شکل



مؤلفه عددی $B$ در جهت $A$ را می توان از تقسیم طرفین رابطه $A \cdot B = |A||B|\cos\theta$ به دست آورد.

$$|B|\cos\theta = \frac{A \cdot B}{|A|} = B \cdot \frac{A}{|A|}$$

مثال (1-4):

تصویر برداری $B = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2k$ را بر $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2k$ به دست آورید.

$$\text{تصویر } \vec{B} \text{ بر بردار } \vec{A} = |B|\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A|} = \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = \frac{6 - 4 + 4}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

اما این مقدار اندازه تصویر می باشد.

برای به دست آوردن بردار تصویر $\vec{B}$ بر $\vec{A}$ باید این عدد را در بردار یکّه $\vec{A}$ ضرب کنیم.

$$\text{تصویر } B \text{ بر } A = B\cos\theta = \frac{\vec{A}}{|A|} = 2\frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{4}{3}\hat{k}$$

## خط های واقع در صفحه و فواصل نقطه ها از خط

ضرب عددی بردارها روش نوینی برای درک معادلات خطوط واقع در صفحه و نیز راه سریعی برای محاسبه فواصل نقـاط تا خطوط به دست می دهد.

فرض می کنیم $L$ خطی باشد که از نقطه $P_0(x_0, y_0)$ می گذرد و بردار $N = a\hat{i} + b\hat{j}$ عمود است.

نقطه ای دلخواه به مختصات $P(x, y)$ بر این خط واقع است.

که خواهیم داشت:

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

از این معادله برای به دست آوردن معادله خط استفاده می شود.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$
$$ax + by = a_0x_0 + by_0$$

در این صورت $ax + by = c$ که $ax_0 + by_0 = c$

**مثال (۱- ۵):**

معادله خط گذرنده از $P_0(3,5)$ و عمود بر $\vec{N} = \hat{i} + 2\hat{j}$ را بیابید.

حل:

$$((x - 3)\hat{i} + (y - 5)\hat{j}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j}) = 0$$

$$(x - 3)1 + (y - 5)2 = 0 \qquad x - 3 + 2y - 10 = 0$$

$$x + 2y = 10 + 3 = 13 \Rightarrow x + 2y = 13$$

چنانچه نقطه ای به مختصات $P(x_0, y_0)$ فاصله اش از خطی به معادله $ax + by = c$ خواسته شود:

حل: ابتدا یک نقطه دلخواه مانند $R$ که در معادله خط صدق کند را انتخاب می کنیم. $R = (x, y)$

آن گاه تصویر بردار $\overrightarrow{RP}$ بر بردار عمود بر خط همان فاصله نقطه $P$ از خط می باشد.

$\dfrac{\overrightarrow{RP} \cdot \vec{N}}{|N|} =$ فاصله نقطه $P$ از خطی که بر $\vec{N}$ عمود باشد.

**مثال (۱- ۶):**

فاصله نقطه $(1,2)$ را از خط $2x + y = 10$ به دست آورید:

حل: ابتدا یک نقطه دلخواه روی خط در نظر می گیریم $R=(5,0)$

آن گاه فاصله نقطه P از خط به قرار زیر است:

$$\text{فاصله } P \text{ از خط} = \left|\frac{\overrightarrow{R\cdot P}\cdot \vec{N}}{|N|}\right| = \frac{((5-1)\hat{i}+(0-2)\hat{j})\cdot(2\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}} = \left|\frac{10-2}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{8}{\sqrt{5}}\right| = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

## ضرب برداری

اگر A و B موازی نباشند صفحه ای را مشخص می کنند. بردار واحد $\hat{n}$ را عمود بر این صفحه طبق قانون دست راست بر می گزینیم. با این ترتیب که $\hat{n}$ را آن بردار واحد قائم می گیریم که انگشتان دست راست ما روی زاویه $\theta$ در جهت از A به B خم شود، این بردار در جهت انگشت شست ما باشد.

$$\vec{A}\times\vec{B} = n|A||B|\sin\theta$$

$\theta$ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می باشد.

توجه شود که در ضرب برداری جا به جا شدن بردارها سبب قرینه شدن نتیجه می شود.

$$\vec{B}\times\vec{A} = -(\vec{A}\times\vec{B})$$

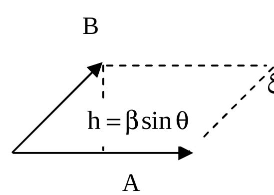
بر خلاف ضرب اسکالر، ضرب برداری تعویض پذیر نیست.

با استفاده از تعریف ضرب برداری در مورد بردارهای واحد k , j , i داریم:

$$\hat{i}\times\hat{j} = -(\hat{j}\times\hat{i}) = k$$
$$\hat{j}\times\hat{k} = -(\hat{k}\times\hat{j}) = \hat{i}$$
$$\hat{k}\times\hat{i} = -(\hat{i}\times\hat{k}) = \hat{j}$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

$|A\times B|$ مساحت متوازی الاضلاعی است که اضلاع آن بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می باشد.




ارتفاع × قاعده = مساحت متوازی الاضلاع

$$|A|\times|B|\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ |\text{مساحت متوازی الاضلاع}| = |A||B|\sin\theta = |\vec{A}\times\vec{B}|$$

## قوانین شرکت پذیری و توزیع پذیری

طبق قاعده ضرب برداری خاصیت شرکت پذیری ندارد. چنانچه می دانیم $(A\times B)\times C$ در صفحه $A$ و $B$ قرار دارد. حال آن که $A\times(B\times C)$ در صفحه $B$ و $C$ است. اما:

$$(r\vec{A})\times(s\vec{B})=(rs)\vec{A}\times\vec{B}$$

در مورد ضرب برداری، قوانین توزیع پذیری برداری برقرار است.

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$
$$(\vec{B}+\vec{C})\times A=\vec{B}\times A+\vec{C}\times A$$

## فرمول دترمینانی $A\times B$:

حال هدف ما این است که نشان دهیم مؤلفه های $\vec{A}\times\vec{B}$ را چگونه از مؤلفه های $A$ و $B$ به دست آوریم:

$$\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}\quad,\quad \vec{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$$

$$=a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k})$$

$$=0+a_1b_2\hat{k}+a_1b_3(-\hat{j})+a_2b_1(-\hat{k})+0+a_2b_3(\hat{i})+a_3b_1(\hat{j})+a_3b_2(-\hat{i})+0$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

این جمله همان دترمینان مقابل است:

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

بنابراین برای تشکیل ضرب برداری می توان از تشکیل دترمینانی با اعضای مربوطه بهره برد.

**مثال (۱- ۷):**

مساحت مثلثی سه رأس آن $P(+1,1,0)$ و $Q(3,5,1)$ و $M(7,2,3)$ می باشد. مطابق $P$ و $Q$ و $M$ هستند را بیابید:

حل:

$$\overrightarrow{MP}=(7-1)\hat{i}+(2-1)\hat{j}+(3-0)\hat{k}=6\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{QP}=(3-1)\hat{i}+(5-1)\hat{j}+\hat{k}=2\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{|\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{QP}|}{2}$$

$$\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (1\times1-4\times3)\hat{i} + (3\times2-6\times1)\hat{j} + (6\times4-2\times1)\hat{k} = -11\hat{i} + 0\hat{j} + 22\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{QP}| = \sqrt{(-11)^2 + (0)^2 + (22)^2} = 11\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{11\sqrt{5}}{2}$$

**معادله خط در فضای سه بعدی**

فرض می کنیم $L$ خطی باشد که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ بگذرد و موازی با بردار $V = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$ باشد. پس $L$ مجموعه نقطه ای است که مانند $P(x, y, z)$ بردار $\overrightarrow{PP_0}$ موازی با $\vec{V}$ باشد.

توجّه: در اینجا برخلاف نمونه های قبلی ما برداری را که خط بر آن عمود می باشد را نداریم بلکه هادی خط را داریم:

$$\overrightarrow{P_0P} = tv$$

اگر این معادله را بر حسب مؤلفه ها بنویسیم خواهیم داشت:

$$(x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k} = t(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k})$$

$$x - x_0 = tA \qquad y - y_0 = tB \qquad z - z_0 = tC$$

$$x = x_0 + tA \ , \ y = y_0 + tB \ , \ z = z_0 + tC$$

**مثال (۱– ۸):**

معادلات پارامتری خط گذرنده از نقطه $(5,1,2)$ و موازی با بردار $\vec{V}$ را بیابید. $(V = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$

حل:

$$A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$$

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (5,1,2)$$

$$\Rightarrow x = 5 + 2t \ , \ y = 1 + 4t \ , \ z = 2 - t$$

### فاصله یک نقطه از یک خط

برای یافتن فاصله نقطه $P$ از خط $L$ گام های زیر را بر می داریم:

گام 1: نقطه $Q$ را روی $L$ چنان بر می گزینیم که نزدیک ترین فاصله را تا $P$ داشته باشد.

گام 2: فاصله $P$ تا $Q$ را محاسبه می کنیم.

**مثال (۱– ۹):**

فاصله نقطه $P(1,1,5)$ را از خط زیر بیابید.

$$x=1+t\ ,\ y=3-t\ ,\ z=t$$

گام 1: ابتدا نقطه $Q$ را از خط انتخاب می کنیم، که بر خط منطبق است.

$$Q(1+t,3-t,t)$$

می خواهیم مقداری از $t$ را بیابیم که به ازای آن فاصله $P$ و $Q$ مینیمم شود.

بنابراین:

فاصله $P$ تا $Q$ $f(t)=\sqrt{(1+t-1)^2+(3-t-1)^2+(t-5)^2}$

$f(t)$ وقتی مینیمم می شود که عبارت زیر رادیکال مینیمم شود.

$$L(t)=t^2+(2-t)^2+(t-5)^2$$

حال مشتق می گیریم و مشتق را برابر صفر قرار می دهیم.

$$L'(t)=0=2t+2(2-t)(-1)+2(t-5)$$

$$=2t-4+2t+2t-10=6t-14=0\Rightarrow t=\frac{7}{3}$$

حال $t$ به دست آمده را در $f(t)$ قرار می دهیم تا فاصله به دست آید.

$$f(t)=\sqrt{(\frac{7}{3})^2+(2-\frac{7}{3})^2+(\frac{7}{3}-5)^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{7}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2+(-\frac{8}{3})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{114}}{9}=\frac{\sqrt{114}}{3}$$

## معادله خط

فرض می کنیم $M$ صفحه ای در فضاست که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ می گذرد و بر بردار $N = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$ عمود است. (قائم)، پس مجموعه ای از نقاط مانند $P(x,y,z)$ در صورتی تشکیل صفحه $M$ را می دهند که بردار $\overrightarrow{P_0P}$ بر $N$ عمود باشد.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

$$\boxed{Ax + By + Cz = D \quad , \quad D = Ax_0 + By_0 + Cz_0}$$

که کادر بالا معادله صفحه را نشان می دهد.

**مثال (۱– ۱۰):**

معادله صفحه ای را بیابید که از $P_0(-3,0,6)$ بگذرد و بر $N = 5\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ عمود باشد.

حل:

$$((x-(-3))\hat{i} + (y-0)\hat{j} + (z-6)\hat{k}) \cdot (5\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow 5(x+3) + 2y + (z-6) = 0$$

$$5x + 2y + z = -15 + 0 + 6 = -9$$

$$5x + 2y + z = -9$$

## زاویه بین دو صفحه

بنا بر تعریف زاویه ای که بین دو صفحه متقاطع تشکیل می شود، زاویه حاده ای است که دو بردار قائم آن ها با هم می سازند.

**مثال (۱– ۱۱):**

زاویه بین دو صفحه $3x + 6y - 2z = 30$ و $2x + y + 2z = 72$ را تعیین کنید.

حل:

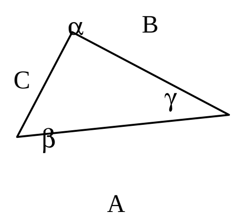
$$N_1 = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$N_2 = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

حال باید زاویه بین دو بردار $\overrightarrow{N_1}$ و $\overrightarrow{N_2}$ را به دست آوریم:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|N_1||N_2|} = \frac{(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{9+36+4}\times\sqrt{4+1+4}} = \frac{6+6-4}{7\times 3} = \frac{8}{21} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{8}{21}$$

## قانون سینوس ها

اگر در یک مثلث اندازه سه ضلع به ترتیب $A$ ، $B$ و $C$ باشد و اندازه زوایای روبرو به ضلع های مثلث به ترتیب $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ باشد مطابق شکل:




رابطه بین اندازه اضلاع و سینوس زوایا مطابق زیر خواهد بود:

$$\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C}$$

**نمونه سوالات تستی**

**۱- تصویر برداری** $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ **بر** $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ **کدام می باشد؟**

1) $-\frac{1}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$　　2) $-\frac{1}{9}\hat{i} - \frac{2}{9}\hat{j} + \frac{2}{9}\hat{k}$

3) $+\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}$　　4) $+\frac{1}{9}\hat{i} + \frac{2}{9}\hat{j} - \frac{2}{9}\hat{k}$

**۲- معادله خط گذرنده از** $P_0$(۳,۱,۲) **و عمود بر** $\vec{N} = (\hat{i} + ۲\hat{j} + \hat{k})$ **را بیابید.**

1) $x + 2y + z = 7$　　2) $x + 2y + z = -7$

3) $x - 2y + z = -7$　　4) $-x + 2y + z = -7$

**۳- فاصله نقطه** $P(5,3)$ **را از خط** $x + 3y = 6$ **بیابید.**

1) $\frac{8\sqrt{10}}{10}$　　2) $-\frac{2}{\sqrt{10}}$　　3) $\frac{8}{\sqrt{10}}$　　4) $+\frac{2\sqrt{10}}{10}$

**۴- مطلوب است معادلات پارامتری خطی که از نقاط** $P(3,2,3)$ **و** $Q(1,-1,4)$ **می گذرد:**

1) $x = -2t + 3,\ y = -3t + 3,\ z = -t + 1$

2) $x = -2t + 1,\ y = -3t - 1,\ z = -t + 4$

3) $x = -2t + 3,\ y = -3t + 2,\ z = t + 3$

4) $x = -2t + 1,\ y = -3t - 1,\ z = t - 4$

**۵- زاویه بین صفحات** $6x + 6y - 3z + 5 = 0$ **و** $x - 2y + 2z - 4 = 0$ **برابر است با:**

1) $\arccos(-\frac{4}{9})$　　2) $\arccos(-\frac{9}{4})$　　3) $\pi - \arccos(-\frac{4}{9})$　　4) $\pi - \arccos(-\frac{9}{4})$

**۶- برداری موازی فصل مشترک دو صفحه** $3x - 6y - 2z = 64$ **و** $2x + y - 2z = 25$ **کدام گزینه می باشد؟**

1) $14\hat{i} - 2\hat{j} + 15\hat{k}$　　2) $14\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$　　3) $14\hat{i} + 2\hat{j} - 15\hat{k}$　　4) $7\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$

**۷- معادلات پارامتری فصل مشترک دو صفحه** $3x - 6y - 2z = 15$ **و** $3x + y + z = -6$ **کدام می تواند باشد؟**

1) $\begin{cases} x = -4t + 11 \\ y = 9t + 3 \\ z = 21t \end{cases}$　　2) $\begin{cases} x = 4t + 11 \\ y = 9t + 3 \\ z = -21t \end{cases}$　　3) $\begin{cases} x = -4t + 11 \\ y = -9t + 3 \\ z = 21t \end{cases}$　　4) $\begin{cases} x = -4t + 11 \\ y = -9t + 3 \\ z = 3t \end{cases}$

**۸- با استفاده از قانون سینوس ها داریم:**

1) $\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$　　2) $C\sin\alpha = B\sin\gamma = A\sin\beta$

3) $A\sin\alpha = B\sin\beta = C\sin\gamma$　　4) $\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C}$

**۹- سه بردار زیر داده شده است** A(۱,۲,۳) **و** B(۰,۱,۵) **و** C(۱,۲,۳) **برداری پیدا کنید که بر** $\vec{A}$ **عمود بوده و در صفحه** $\vec{B}$ **و** C **واقع باشد.**

1) $2B - C$　　2) $6B - 17C$　　3) $5B + 8C$　　4) $12\vec{B} - \vec{C}$

## پاسخنامه سوالات تستی

### ۱- حل: گزینه ۲ صحیح می باشد زیرا:

$$A\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|B|} = \text{اندازه تصویر} = \frac{(3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\cdot(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}} = \frac{3(1)-1(2)+1(-2)}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{بردار تصویر} = a\cos\theta\frac{\vec{B}}{|B|} = -\frac{1}{3}\frac{(+\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}} = -\frac{1}{3}(\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{2}{3}\hat{j}-\frac{2}{3}\hat{k}) = -\frac{1}{9}\hat{i}-\frac{2}{9}\hat{j}+\frac{2}{9}\hat{k}$$

### ۲- حل: گزینه ۱ صحیح می باشد زیرا:

$$\overrightarrow{PP_0}\cdot N = 0 \Rightarrow ((x-3)\hat{i}+(y-1)\hat{j}+(z-2)\hat{k})\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}) = 0$$
$$\Rightarrow (x-3)1+(y-1)2+(z-2)1 = 0$$

$$x-3+2y-2+z-2=0 \Rightarrow x+2y+z=7$$

### ۳- حل: گزینه ۱ صحیح می باشد زیرا:

ابتدا یک نقطه دلخواه روی خط در نظر می گیریم: $R=(0,2)$

آن گاه داریم:

$$|\frac{\overrightarrow{RP}\cdot N}{|N|}| = \frac{((0-5)\hat{i}+(2-3)\hat{j})\cdot(1\hat{i}+3\hat{j})}{\sqrt{(1)^2+(3)^2}} = |\frac{(5\hat{i}-\hat{j})\cdot(\hat{i}+3\hat{j})}{\sqrt{10}}| = |\frac{-5-3}{\sqrt{10}}| = |-\frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{10}$$

از آن جا که فاصله منفی نمی باشد آن عدد را با علامت + در نظر می گیریم یعنی: = فاصله

### ۴- حل: گزینه ۳ صحیح می باشد زیرا:

$$\overrightarrow{PQ} = (1-3)\hat{i}+(-1-2)\hat{j}+(4-3)\hat{k} = -2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$$

خط موازی با بردار $\overrightarrow{PQ}$ است.

بنابراین:

$$x=-2t+3$$
$$y=-3t+2$$
$$z=t+3$$

### ۵- حل: گزینه ۳ صحیح می باشد زیرا:

$$N_1 = 6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$$
$$N_2 = 1\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\cos\theta = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1||N_2|} = \frac{(6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k})\cdot(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{36+36+9}\times\sqrt{1+4+4}} = \frac{6-12-6}{9\times 3} = -\frac{12}{9\times 3} = -\frac{4}{9}$$

$$\theta = \arccos(-\frac{4}{9})$$

ولی توجه شود که در اینجا زاویه ما از $90^\circ$ بیشتر شده است بنابراین باید زاویه ای که حاصل جمعش با آن $180^\circ$ می شود را به عنوان زاویه صفحات اعلام کنیم.

$$\Rightarrow \theta = \pi - \arccos(-\frac{4}{9})$$

**۶- حل: گزینه ۲ صحیح می باشد زیرا:**

$$N_1 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$N_2 = 2\hat{i} + 1\hat{j} - 2\hat{k}$$

فصل مشترک دو صفحه بر نرمال هر یک از صفحات عمود می باشد.

$$\Rightarrow A = (N_1 \times N_2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$$

**۷- حل: گزینه ۳ صحیح می باشد زیرا:**

فصل مشترک بر نرمال هر دو صفحه عمود می باشد.

$N_1 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$ $\qquad$ $N_2 = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ $\qquad$ $\vec{A} = N_1 \times \overrightarrow{N_2}$

$$\Rightarrow \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - 9\hat{j} + 21\hat{k}$$

حال که هادی فصل مشترک به دست آمد کافی است نقطه ای را بیابیم که در هر دو صفحه باشد.

برای مثال $(z=0)$ فرض شود.

$$\begin{cases} 3x - 6y = 15 \\ 3x + y = -6 \end{cases} \Rightarrow -7y = 21 \Rightarrow y = 3$$

$$3x - 6(3) = 15 \Rightarrow x = \frac{33}{3} = 11$$

در نتیجه نقطه ای که روی هر دو صفحه باشد $(11,3,0)$ می باشد که این یکی از نقاط است.

$$x = -4t + 11$$
$$y = -9t + 3$$
$$z = 21t$$

**۸- حل: گزینه ۴ مطابق نکته های ارائه شده درست است.**

**۹- حل:**

$$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$$

ابتدا برداری را می یابیم که در صفحه $(B,C)$ عمود باشد.

$$A\times(B\times C) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -17\hat{i} - 20\hat{j} + 19\hat{k}$$

سپس برداری را پیدا می کنیم که هم بر $A$ عمود بوده و هم بر صفحه $(B,C)$ عمود باشد.

حال به دنبال گزینه ای هستیم که با بردار بالا موازی باشد.

$$2B - C = (0,2,10) + (-1-2-3) = (-1,0,7)$$
$$6B - 17C = (0,6,30) + (-17-34-51) = (-17,-28,-21)$$
$$5B + 8C = (0,5,25) + (8,16,24) = (8,21,49)$$
$$12B - C = (0,12,60) + (-1-2-3) = (-1,10,57)$$

همان طور که دیده می شود هیچ کدام از بردارهای داده شده با بردار $A\times(B\times C)$ موازی نیست و هیچ کدام از گزینه ها صحیح نمی باشد.