

حفاظت در برابر پرتو ها

**RADIATION  
PROTECTION**

[iranpuyesh.ir](http://iranpuyesh.ir)



# ایران پویش

سامانه علمی، پژوهشی و کارآفرینی

مرجع تالیف و گرد آوری محتوای آموزشی

جزوات | درسنامه ها | نمونه سوالات | پکیج ارشد و دکتری

راههای تماس با ما:

وبسایت: [iranpuyesh.ir](http://iranpuyesh.ir)

ایمیل: [support@iranpuyesh.ir](mailto:support@iranpuyesh.ir)

تلگرام: [@iranpuyesh](https://t.me/iranpuyesh)

اینستاگرام: [@iranpuyesh](https://www.instagram.com/iranpuyesh)

واتس اپ: ۰۹۳۷۴۴۹۵۰۷۰

حفاظت در برابر پرتو ها

---

Radiation Protection

# فهرست مطالب

6	فصل اول: مقدمه‌ای بر حفاظسازی
8	فصل دوم: خصوصیات میدان‌های پرتو و چشمه‌ها
8	1-2) شارش و نرخ شارش (Fluence and Fluence Rate)
11	2-2) شار (Flow)
14	فصل سوم: اندرکنش پرتوها با ماده (Interaction of Radiation with Matter)
14	1-3) مفاهیم اولیه:
23	2-3) انواع سطح مقطع‌ها برای اندرکنش‌های فوتونی:
26	سطح مقطع Klein-Nishina برای پراکندگی غیرهمدوس
39	3-3) اندرکنش‌های نوترون (Neutron Interactions):
50	4-3) اندرکنش‌های ذرات باردار (Charged- Particle Infracctions):
61	فصل چهارم: چشمه‌های پرتوی متداول در حفاظسازی
68	2-4) منابع فوتون‌های گاما
73	3-4) منابع پرتوهای X
80	فصل پنجم: توابع پاسخ فوتون و نوترون
80	1-5) کمیت دزیمتری
94	2-5) کمیت‌های معادل دز (Dose equivalent)
97	3-5) مفهوم تابع پاسخ پرتوها
98	4-5) توابع پاسخ موضعی برای اهداف نقطه‌ای
100	5-5) توابع پاسخ موضعی برای فوتون‌ها:
101	6-5) توابع پاسخ برای انسان به‌عنوان هدف:
109	فصل ششم: تکنیک‌های ویژه حفاظسازی برای فوتون‌ها
109	1-6) مفاهیم مقدماتی
112	2-6) ضریب انباشت (Build up factor):
119	3-6) مفاهیم مقدماتی طراحی حفاظ
122	4-6) فاکتورهای تضعیف $A_f$ برای دسته پرتوهای فوتونی:
125	6-6) مفهوم آلبدو (Albedo Concept):
125	7-6) مفهوم جویبارش (Striming):
126	8-6) مفهوم آسمان تاب (Skyshine):
127	مجموعه تست
131	پاسخنامه
135	مجموعه تست
139	پاسخنامه
140	سوالات تشریحی:

Sample

## فصل اول: مقدمه‌ای بر حفاظت سازی

از قرن بیستم تا کنون به‌کارگیری پرتوهای گوناگون و رادیواکتیویته در صنایعی مانند تولید سوخت و تصویربرداری، پرتودرمانی و ... اجتناب‌ناپذیر است. اما حفاظت در برابر آثار تخریبی و بیولوژیک آنها نیز از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. برای حفاظت در برابر این پرتوها می‌توان سه راه کار اساسی را به‌کار برد که عبارتند از:

(1) افزایش فاصله‌ی شیء مورد حفاظت تا چشمه پرتو

(2) کاهش مدت زمان پرتوگیری شیء مورد حفاظت

(3) استفاده از حفاظتی که قابلیت ممانعت از نفوذ پرتوها را به مناطق حفاظت شده داشته باشد.

به‌دلیل تغییر شرایط و نیز ضرورت حضور افراد یا دستگاه در محیط‌ها یا در یک جایگاه خاص همواره نمی‌توان موارد یک و دو را رعایت کرد. البته باید قوانین خاصی که هر یک از ارگان‌های رسمی برای فاصله‌ی شخص از چشمه یا مدت زمان پرتوگیری یا میزان دز مجاز ارائه کرده‌اند، به‌کار بست. ولی گاهاً اعمال این موارد شرط لازم برای حفاظت در برابر پرتوهاست و کافی نیست. اما مورد سوم که بحث اصلی این مجموعه است را می‌توان به‌عنوان عامل بازدارنده‌ای در مقابل پرتوها در نظر گرفت. علم طراحی و آنالیز حفاظ به بررسی شرایط چشمه‌ها و نوع پرتوها و اندرکنش‌های متفاوت آنها با ماده می‌پردازد و در نهایت این بررسی‌ها منجر به استفاده از یک یا چند لایه‌ای از مواد مناسب می‌شود که سد خوبی در برابر پرتوها ایجاد می‌کند. ابتدا به تعریف جامعی از حفاظ می‌پردازیم. حفاظ از یک یا چند لایه ماده تشکیل شده است که بدین ترتیب دیواره‌ای را بین چشمه‌های پرتوهای یون‌ساز و شیء مورد حفاظت ایجاد می‌کنیم تا میزان تابش پرتوها به شیء مورد حفاظت کاهش یابد. در حفاظ مقابل پاره‌ای از پرتوهای کم‌نفوذ می‌توان کاملاً پرتوگیری را به صفر رساند ولی در پرتوهایی که دارای برد بی‌نهایت هستند و عمق نفوذ زیادی دارند، این لایه‌های حفاظتی می‌تواند به‌عنوان تضعیف‌کننده عمل نماید.

شیء مورد حفاظت تنها انسان نیست چرا که در بعضی مواقع می‌خواهیم از یک دستگاه یا یک قطعه الکترونیکی محافظت نمائیم. به‌طور مثال دیواره ماهواره‌ها از ترکیباتی باید ساخته شود که در مقابل پرتوهای کیهانی مقاومت بالایی داشته باشد و در ضمن مانع نفوذ این پرتوها به قطعات الکترونیکی داخل سیستم شود.

آنچه که در علم طراحی و آنالیز حفاظ باید مورد توجه قرار گیرد، آگاهی از چگونگی تولید پرتوها و منابع مختلف مولد پرتو، ساختار هندسی پرتوها چگونگی اندرکنش پرتوها با ماده، چگونگی تغییرات میکروسکوپی ناشی از اندرکنش پرتوها با ماده و همچنین تأثیر ماده بر تعداد و راستای پرتوهای گوناگون می‌باشد.

برای پاسخ به چگونگی‌های فوق‌الذکر کمیت‌های گوناگونی تعریف شده‌اند که باید در هر مرحله اندازه‌گیری شوند. برای این

کمیت‌ها مقادیر مرجعی نیز در نظر گرفته شده تا با مطابقت مقادیر اندازه‌گیری شده با مقادیر معلوم اولاً میزان خطاها کاهش یابد و دوم این‌که استانداردهای حفاظت در برابر پرتوها نیز رعایت گردد تا آخرین حد حفاظت تأمین گردد.

کمیت‌های رسمی متفاوتی برای حفاظت در برابر پرتوها قوانین و توصیه‌هایی ارائه نموده‌اند. از جمله

- British X-Ray and Radium protection committee (1921)
- International Commission on Radiological Units and measurements (ICRU)
- International Commission on Radiological Protection (ICRP)
- Environmental Protection Agency (EPA)

مشخصات چند مؤسسه معروف حفاظت در برابر پرتوها نیز به‌شرح زیر است:

- National Nuclear Data Center, Bldg. 197D, Brookhaven National Laboratory, Upton, NY 11973-5000. Provides basic cross-section and nuclear data through the internet at <http://www.nndc.bnl.gov>.
- International Atomic Energy Agency, P.O. Box 100, A-1400 Vienna, Austria. Provides many publications and, through its Nuclear Data Section, provides basic nuclear data and reports. The Nuclear Data Section may be reached through the internet at <http://www.iaea.or.at>.
- OECD Nuclear Energy Agency Data Bank, 12, boulevard des Iles, 92120, Issy les Moulineaux, France. Provides nuclear data and other shielding information through the Data Bank. It may be reached through the internet at <http://www.nea.fr/html/databank/>.
- National Institute of Standards and Technology, US Dept. of Commerce, Gaithersburg, MD 20899-0001, through its Physics Laboratory issues reports, programs and nuclear and atomic data. Reachable through the internet at URL <http://physics.nist.gov>.
- National Council on Radiation Protection and Measurements (NCRP), at 7910 Woodmont Avenue, Suite 800, Bethesda, MD 20814-3098, issues various guidelines and recommendations for the United States. It may be reached through the internet at <http://www.ncrp.com>.
- International Commission on Radiation Units and Measurements (ICRU), at 7910 Woodmont Avenue, Suite 800, Bethesda, MD 20814-3098, issues international shielding and dosimetry guidelines and recommendations. It may be reached through the internet <http://users.prole.com/icru/index.html>.
- The German Institute of Radiation Protection, an institute of the Forschungszentrum für Umwelt und Gesundheit (GSF), provides shielding and dosimetry reports. It may be reached at Ingolstädter Landstraße 1, D-85764 Neuherberg, Germany, or at the www URL <http://www.gsf.de/englisch/index.html>.

با رجوع به آدرس‌های اینترنتی مذکور و نیز کتابخانه انرژی اتمی ایران می‌توان اطلاعات جامع و وسیعی را در زمینه حفاظت در

برابر پرتوها فراهم آورد.

## فصل دوم: خصوصیات میدان‌های پرتو و چشمه‌ها

عبور پرتوهای یون‌ساز مستقیم و غیرمستقیم از ماده و برخورد پرتوها با آن در این بحث مورد توجه قرار دارد. پرتوهایی که به‌طور مستقیم باعث یونش در ماده می‌شوند، پرتوهای باردار می‌باشند و پرتوهایی که به‌طور غیرمستقیم موجب یونش ماده می‌شوند، ذرات بدون بار هستند مانند فوتون‌ها و نوترون‌ها که برخورد آن‌ها با ماده ذرات باردار تولید می‌کند.

به‌طور کلی میدان تشعشع یا میدان پرتو (Radiation Field) به ذرات و خط‌سیر آن‌ها در قسمت‌هایی از فضا و نواحی آن‌ها اطلاق می‌شود. چه این بررسی در یک بازه زمانی باشد و یا در یک لحظه صورت گیرد. خصوصیات میدان پرتو برای هر ذره با لحاظ کردن تغییرات خاص توزیع انرژی ذره و جهت آن حاصل می‌گردد. در موارد خاص مانند آزمایشات مربوط به پراکندگی نوترون، خصوصیاتی مانند اسپین نیز ممکن است مورد نیاز باشد.

آن‌چه که برای ما حائز اهمیت است، چگونگی مشخص شدن میدان پرتو در یک ناحیه از فضا است که آن را شارش (Fluence) و چگونگی تعیین میدان پرتو در یک محدوده یا مرزها که به آن شار ذره (Flow) گفته می‌شود. شارش و شار یا فلوننس و فلو کمیت‌های رادیومتری<sup>1</sup> هستند و با کمیت‌های دوزیمتری<sup>2</sup> متفاوت می‌باشند. خصوصیات اندازه‌گیری شده به‌طور کلی در مواقع مختلف دارای تغییر هستند به‌طوری که این تغییرات به تعداد مسیرهای منحصر به فرد ذره بستگی دارد. همچنین اندازه‌گیری مستلزم دانستن حجم نهایی یا نواحی مرزی نیز می‌باشد. با روش‌های مونت کارلو نیز می‌توان فلو و فلوننس را تعیین کرد.

شارش یک کمیت نقطه‌ای است و به‌صورت تابعی نقطه‌ای تعریف می‌شود که به موقعیت اولیه ورودی‌ها بستگی دارد و باید مقدار مورد انتظار با احتساب توزیع آماری به‌صورت یک متغیر تصادفی تعیین گردد. این شرایط موجب می‌شود که فلو، فلوننس یا کمیت دوزیمتری را بتوان در یک نقطه از فضا تعیین کرد. اما هر اندازه‌گیری تنها باید یک برآورد از مقدار مورد انتظار را به ما بدهد که این هم از طریق برون‌یابی (extrapolation) در هر ناحیه از فضا میسر می‌گردد.

### 1-2) شارش و نرخ شارش (Fluence and Fluence Rate)

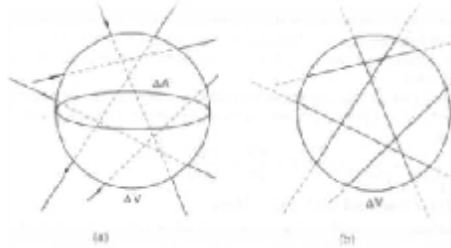
یک راه اصولی برای اندازه‌گیری شدت میدان پرتو یا تشعشع این است که آن را برای تعدادی از ذرات که به یک حجم معین وارد می‌شوند، محاسبه کنیم. برای تعیین شارش تعداد ذرات  $\Delta N_p$  که در بازه‌ای از زمان به عریض‌ترین سطح مقطع یک کره (دایره عظیمه کره) آن  $\Delta A$  نفوذ می‌کنند، در نظر گرفته می‌شود که در واقع با این کار شارش متوسط به‌دست می‌آید و اگر از آن حد بگیرییم، مقدار آن را در هر نقطه از فضا می‌توانیم تعیین کنیم. و بدین ترتیب در هر نقطه از فضا می‌توان منحنی آن را برحسب

<sup>1</sup> Radiometric quantities

<sup>2</sup> Dosimetric quantities



مکان رسم نمود.



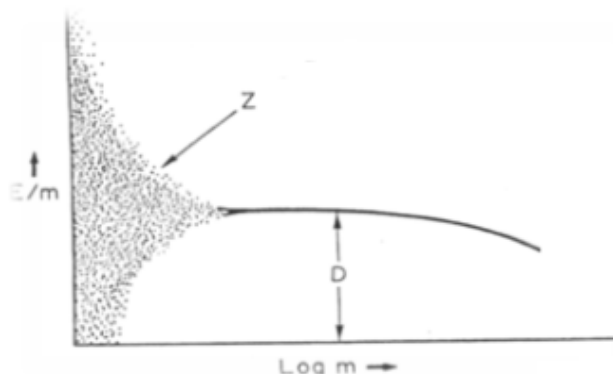
تصویر 2-1) در (a) تعداد ذراتی که به سطح برخورد می‌کنند، مورد توجه قرار گرفته است و در (b) تعداد ذرات داخل کره مدنظر است.

اگر حد بگیریم یعنی سطح دایره عظیمه را مرتباً کوچک و کوچک تر کرده تا به مقدار حدی صفر میل کند:

$$\Phi \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta N_p}{\Delta A} \right)$$

واحد شارش  $[1/\text{cm}^2]$  است. برای رسم منحنی  $\frac{\Delta N_p}{\Delta A}$  را برحسب  $\Delta l$ ، از آن جا که ما با یک تعداد معدودی ذره سروکار داریم، هر چه ابعاد کوچک تر می‌شود، آمار کم شده یعنی تعداد ذرات کم تر شده و خطا هم افزایش پیدا می‌کند. از طرف دیگر با حد گرفتن، خطا افزایش می‌یابد لذا برای این که یک تابع نقطه‌ای داشته باشیم، نقاطی را مبنا قرار می‌دهیم که تغییرات کمی وجود دارد چرا که تغییرات اندک، خطای کمی نیز ایجاد می‌کند.

این نقاط را به‌طور پیوسته به هم وصل کرده و در نقاط انتهایی منحنی که اندازه کاهش یافته، عمل برون‌یابی انجام می‌شود. مقدار شارشی است که به مرکز کره نسبت داده می‌شود در واقع همان مقدار حدی و تابع نقطه‌ای است. اما در عمل ما هیچ ابزار دزیمتری نداریم که مقدار را نقطه‌ای نشان بدهد ولی ما می‌توانیم ابزار را کوچک کنیم تا به آن نزدیک شویم. هرچه شارش بیش تر باشد، این نقاط به صفر نزدیک تر می‌شود و هرچه شارش کم تر شود، از همان نقاط دور دچار مشکل نوسانات میرا می‌شود. تصویر (2-2) گویای این مطلب می‌باشد.



تصویر (2-2) چگالی انرژی به صورت تابعی از جرم نشان داده شده است. محور افقی ناحیه‌ای است که دز جذبی را می‌توان در طی یک اندازه‌گیری منفرد تخمین زد.

تعریف دیگری از شارش در معادله ترابرد بولتزمن استفاده می‌شود. در حالی که برای اندازه‌گیری شارش از تعریف اول استفاده می‌کنیم. ناگفته نماند همه این تعاریف قابل تبدیل به یکدیگر هستند.

لازم به ذکر است که در هنگام محاسبه شارش در حقیقت آن را در یک بازه زمانی مثلاً  $t_1$  تا  $t_2$  اندازه‌گیری می‌کنیم و در این فاصله ذراتی که به کره برخورد می‌کنند، را به حساب می‌آوریم لذا برای ادامه کار باید همان فاصله زمانی قبلی را استفاده کنیم. به‌عنوان یک تعریف جامع‌تر و سودمندتری از شارش می‌توان آن را با جمع تک‌تک پاره‌خط‌های مسیر در حجم کل کره برآورد کرد که بیش‌تر در روش مونت کارلو استفاده می‌شود چرا که در این روش ما ذرات را دنبال می‌کنیم. به‌گونه‌ای که مختصات دو نقطه را داریم و طول فاصله بین دو نقطه را محاسبه می‌نمائیم.

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

با این تعریف فرمول قبل به صورت زیر در می‌آید:

$$\Phi \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\sum_i S_i}{\Delta V} \right) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{sum of internal track segments lengths}}{\Delta V}$$

اگر مقدار  $\Delta V$  را بزرگ در نظر بگیریم،  $\Phi$  مقدار متوسطی است که به آن حجم نسبت داده می‌شود. چون تابع نقطه‌ای است، در واقع روی حجم مذکور متوسط‌گیری صورت می‌گیرد و آن قدر مقدار متوسط را کوچک کرده و حد می‌گیریم تا به مقدار نقطه‌ای دست پیدا کنیم. در این تعریف ما تمام مسیرهایی را که ذرات داخل حجم طی می‌کنند، جمع می‌زنیم و بر حجم تقسیم می‌کنیم. مزیت این تعریف آن است که اگر حجم مورد بررسی دارای ماده‌ای باشد، و در نقاطی از حجم کره این track lengths ها یا پاره‌خط‌ها در اثر اندرکنش ذره با ماده قطع شوند و مسیر دارای انحراف شود، باز هم جمع بسته می‌شود. در روش قبلی تنها پرتویی که برخورد می‌کرد، محاسبه می‌گشت ولی این‌جا سهم پراکندگی هم منظور می‌شود.

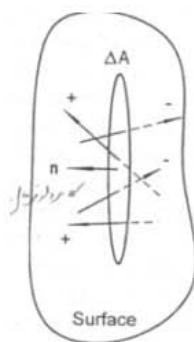
برای محاسبه میزان اندرکنش‌ها، فلوننس را در سطح مقطع ضرب می‌کنیم که در این فرمول خودبه‌خود این موضوع در نظر گرفته می‌شود. مزیت دیگری که این تعریف دارد، آن است که از شکل هندسی کره مستقل است. به عبارت دیگر برای هر شکل هندسی قابل استفاده است و برای آن شکل خاص با ابعاد معین شار متوسط حساب کنیم. بنابراین بیش‌تر برای محاسبه شار متوسط استفاده می‌شود.

## 2-2) شار (Flow)

یک کمیت مورد اندازه‌گیری دیگری از میدان پرتو فلو (Flow) است که بیانگر تعداد ذراتی که از یک سطح مقطع عبور می‌کنند و البته جهت‌گیری آن‌ها هم لحاظ می‌گردد. مقدار فلو می‌تواند هم مثبت و هم منفی باشد. برای اندازه‌گیری این کمیت اگر یک سطح را در نظر بگیریم، جایی که بردار نرمال از سطح خارج شود به‌طور قراردادی مثبت و طرف دیگر آن منفی در نظر گرفته می‌شود و برای ذراتی که هم‌جهت با بردار نرمال از سطح خارج می‌شوند، دارای جهت مثبت و خلاف جهت آن را منفی در نظر گرفته و با جمع برداری تعداد ذرات از یک سطح مقطع مقدار فلو به‌دست می‌آید:

$$J_n \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta M_p}{\Delta A} \right)$$

و نرخ فلو هم همانند روابط نرخ شارش قابل حصول است. به‌طور کلی در مفهوم شارش محیط مستقل از جهت‌های نفوذ ذرات است در حالی که در فلو جهت‌گیری محیط تعریف شده است.



تصویر (3-2) چگونگی محاسبه شار و بردار نرمال در یک سطح مقطع

در سال 1971، ICRU تعریف دیفرانسیلی فلوننس را به‌صورت زیر اعلام کرد:

$$\Phi \equiv \left( \frac{dN_p}{dA} \right)$$

به گونه ای که تحلیل جزئیات مقادیر مورد انتظار با احتساب کمیات تصادفی متناظر و توزیع احتمالی آن ها قابل حصول است. در بسیاری از کاربردها از این احتساب می توان صرف نظر کرد و همه کمیت ها را غیر تصادفی و قطعی به شمار آورد. نرخ شارش یا چگالی شار (flux density) برای تعدادی از ذرات که وارد یک کره می شوند یا مجموع تمام پاره خط های مسیرهایی که طی می کنند، در واحد زمان به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi \equiv \left( \frac{d\Phi}{dt} \right) = \left( \frac{d^2 N_p}{dA dt} \right)$$

برای این فرمول هم باید مشکلات قبل حدی را در نظر بگیریم اگر  $dt$  خیلی کوچک باشد،  $d\Phi$  قابل تشخیص نیست. لذا بهتر است در تجربه  $\Delta$  صورت و مخرج را حساب کرده و مقدار آن را کوچک کرده و آن قدر ادامه دهیم تا حالت حدی به دست آید و سپس همان روند برون یابی صورت می پذیرد اما در تعریف ریاضی از مفهوم دیفرانسیل استفاده می کنیم.

تعاریف مختلفی برای نرخ شارش یا چگالی شار داریم و این که کدام یک را استفاده کنیم به نوع داده بستگی دارد. یک روش محاسبه شار تعریف نرخ شارش ذرات منوانرژتیک در یک نقطه است به گونه ای که چگالی ذرات در آن نقطه و سرعت ذرات در نظر گرفته می شوند. برای ذراتی که در این سرعت پخش می شوند، نرخ فلوئنس کل یا شار با انتگرال گیری از چگالی تعداد ذرات و سرعت به دست می آید:

$$\phi \equiv \int_0^{\infty} n(V) V dV$$

$V$  سرعت ذرات است و برای هر ذره شار تعریف می کنیم. مثلاً می گوئیم شار فوتون ها، شار الکترون ها، ... این ها شار ذره هستند. در مفاهیم قبل آن جایی که  $\Delta N_p$  تعریف کردیم، منظور از  $p$  ذره بود. برای ما فوتون ها هم ذره هستند. در انرژی هایی در حد keV و بالاتر از آن، رفتار امواج الکترومغناطیس یا فوتون ها هم ذره ای تلقی می شوند و به آن ها دید ذره ای داریم. در این جا ما یک نوع ذره خاص داریم که با سرعت  $V$  در حال حرکت است و چگالی آن در واحد حجم یعنی تعداد ذراتی که مدنظر ماست عبارتند از:

$$n(V)dV$$

$n(V)dV$  تعداد ذراتی از نوع بخصوص هستند که سرعت آن ها بین  $V$  و  $V + dV$  است در واحد حجم. پس  $n(V)$  تعداد ذرات با سرعت  $V$  در واحد حجم است.

واحد  $n(V)dV$ ،  $[1/cm^3]$  است و وقتی در  $V$  ضرب می شود،  $[1/cm^2 \cdot s]$  به دست می آید که واحد شار است.

البته این محاسبات تا مادامی معتبر هستند که ما انرژی های مختلف نداریم اما در جایی که پراکندگی داریم، پس تغییر انرژی هم

داریم و اگر بخواهیم فلوئنس را برای انرژی‌های مختلف به دست آوریم، باید انرژی‌ها را دسته‌بندی کرده و گروه آن‌ها را در محاسبات منظور کنیم. لذا برای هر دسته انرژی یک  $\Phi$  حساب کرده و در نهایت آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. کمیت دیگری که حائز اهمیت است، چگالی شار انرژی یا شارش انرژی است. اگر شارش را در انرژی پرتوها ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\varphi_E = \Phi * E$$

حال اگر پرتوها تک انرژی نباشند:

$$\varphi = \int \Phi_E(E) E dE = \Phi_g \bar{E}_g$$

بسیاری از مواقع برای ما انرژی کل مطرح نیست. ممکن است ما  $\Phi_g$  را لازم داشته باشیم لذا باید مقدار  $\varphi$  را در یک گروه انرژی محاسبه کنیم. گروه انرژی در نظر گرفته می‌شود و بعد ما انتگرال روی یک گروه انرژی می‌گیریم. بسیاری از کمیت‌هایی را که ما اندازه‌گیری می‌کنیم، به انرژی وابسته هستند. لذا ما انرژی‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم. اگر تغییرات انرژی اندک باشند، تعداد گروه‌ها را کم‌تر کرده و اگر این تغییرات شدید باشند، دسته‌ها را بیش‌تر می‌کنیم. اگر تعداد دسته‌ها زیاد باشد، می‌توان از متوسط‌گیری انرژی در یک دسته استفاده کرد. بعضی مواقع می‌توان از تک گروهی استفاده کرد و به این ترتیب تقریب زد:

$$\varphi \equiv \Phi_g \bar{E}_g$$

همه این کمیت‌ها حالت جهت‌دار دارند که ما آن‌ها را بررسی نمی‌کنیم.